การเปรียบเทียบการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงทวินามเชิงลบ ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์และวิธีมาร์คอฟ เชน มอนติคาร์โล

A Comparison of Parameter Estimation of Negative Binomial Distribution by Maximum Likelihood, Bayes', and Markov Chain Monte Carlo Methods

อัญมณี กุมมาระกะ* และอัชฌา อระวีพร

ภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ถนนฉลองกรุง เขตลาดกระบัง กรุงเทพมหานคร 10520

Unyamanee Kummaraka* and Autcha Araveeporn

Department of Statistics, Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Chalongkrung Road, Ladkrabang, Bangkok 10520

บทคัดย่อ

วัตถุประสงค์ของงานวิจัยนี้ เพื่อประมาณค่าพารามิเตอร์ของประชากร (p) หรือค่าความน่าจะเป็นที่จะได้รับความสำเร็จในการทดลองแต่ละครั้งของการแจกแจงทวินามเชิงลบ ที่ได้จากวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์และวิธีมาร์คอฟ เชน มอนติคาร์โล โดยกระบวนการทดสอบสมมติฐาน เพื่อศึกษาว่าค่าประมาณจากการจำลองข้อมูลไม่แตกต่างจากค่าพารามิเตอร์ของประชากร โดยจำลองข้อมูลที่มีการแจกแจงทวินามเชิงลบ กำหนดค่าพารามิเตอร์ของประชากรมีค่าน้อย (0.2) ปานกลาง (0.5) และมาก (0.8) และกำหนดขนาดตัวอย่างและค่าพารามิเตอร์ r หรือจำนวนครั้งของความสำเร็จ ดังนี้ ขนาดตัวอย่างเล็ก (n =10) r จะมีค่า 3 และ 5 ขนาดตัวอย่างปานกลาง (n =30) r จะมีค่า 10 และ 20 และขนาดตัวอย่างใหญ่ (n =50) r จะมีค่า 10 และ 30 ผลการวิจัยพบว่าวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ส่วนใหญ่ให้ตัวประมาณไม่แตกต่างจากค่าพารามิเตอร์ของประชากร ยกเว้นเมื่อค่าพารามิเตอร์ของประชากรมากและขนาดตัวอย่างใหญ่ สำหรับวิธีของเบส์ส่วนใหญ่ให้ผลการประมาณค่าไม่แตกต่างจากค่าพารามิเตอร์ของประชากร ที่ทุกระดับค่าพารามิเตอร์ของประชากรและขนาดตัวอย่าง และวิธีมาร์คอฟ เชน มอนติคาร์โลส่วนใหญ่ให้ผลการประมาณค่าไม่แตกต่างจากค่าพารามิเตอร์ของประชากร เมื่อค่าพารามิเตอร์ของประชากรอยู่ในระดับปานกลางหรือมาก และขนาดตัวอย่างปานกลางหรือใหญ่

คำสำคัญ : การแจกแจงทวินามเชิงลบ; ภาวะน่าจะเป็นสูงสุด; เบส์; มาร์คอฟ เชน มอนติคาร์โล

***ผู้รับผิดชอบบทความ :** akasaka.jun23@gmail.com

doi: 10.14456/tstj.2018.5

Abstract

The objective of this research is to estimate the population parameter (p) or probability of success in each experiment based on negative binomial distribution. The maximum likelihood, Bayes' and Markov Chain Monte Carlo methods are considered by the process of hypothesis test to study that the estimators from simulation data are not different from the population parameters. The data is generated from negative binomial distribution as follows: the population parameter as small (0.2), medium (0.5), and large (0.8), the sample sizes and parameter r or called number of success as small sample sizes (n =10) r =3, 5, medium sample sizes (n =30) r =10, 20, and large sample sizes (n =50) r =10, 30. The results are found that the estimators of the maximum likelihood method are not perceivably different from the population parameters in all cases except large population parameter and sample sizes. The Bayes' method produces dissimilar estimation to the population parameters in all sample sizes. Most estimators of Markov Chain Monte Carlo method are equal population parameters when the population parameters and the sample sizes are in level of medium and large.

Keywords: negative binomial distribution; maximum likelihood; Bayes'; Markov Chain Monte Carlo

1. บทนำ

งานวิจัยส่วนมากมีจุดมุ่งหมายเพื่อศึกษาลักษณะที่สนใจในประชากร (population) ซึ่งเรียกว่าค่าพารามิเตอร์ (parameter) แต่เนื่องจากมีข้อจำกัดด้านค่าใช้จ่าย เวลา และทรัพยากรบุคคล จึงได้ศึกษาจากกลุ่มตัวอย่าง (sample) ที่ถูกเลือกมาอย่างสุ่มจากประชากร โดยค่าที่ได้เรียกว่า ตัวประมาณ (estimator) และนำค่าที่ได้จากกลุ่มตัวอย่างอนุมานไปยังประชากร ซึ่งเรียกว่าการอนุมานเชิงสถิติ (statistical inference) โดยแบ่งเป็น 2 รูปแบบ ตามวัตถุประสงค์ของงานวิจัย คือ การประมาณค่า (estimation) และการทดสอบสมมติฐาน (hypothesis testing)

การประมาณค่าพารามิเตอร์ของประชากรเป็นการประมาณค่าพารามิเตอร์ของประชากรด้วยตัวประมาณจากตัวอย่าง โดยที่ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ค่าหนึ่งอาจมีตัวประมาณค่าได้มากกว่าหนึ่งตัว และมีวิธีการหาตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ได้หลายวิธี ได้แก่ วิธีโมเมนต์ (moments method) วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (maximum likelihood method) วิธีไคกำลังสองต่ำสุด (minimum Chi-square method) วิธีกำลังสองต่ำสุด (least squares method) และวิธีของเบส์ (Bayes' method) เป็นต้น จึงต้องพิจารณาความเหมาะสมของค่าประมาณดังกล่าว โดยอาศัยสมบัติของตัวประมาณ ได้แก่ ความไม่เอนเอียง (unbiasedness) ความคงเส้นคงวา (consistency) ความพอเพียง (sufficiency) ความแปรปรวนต่ำสุด (minimum variance) และประสิทธิภาพ (efficiency)

วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดเป็นวิธีการประมาณค่าที่ได้รับความนิยมอย่างแพร่หลาย เนื่องจากสะดวกและไม่มีข้อจำกัดใด ๆ โดยเป็นการหาตัวประมาณค่าของพารามิเตอร์ที่ทำให้ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น (likelihood function) มีค่าสูงสุด และตัวประมาณค่าที่ได้จากวิธีนี้มีคุณสมบัติของตัวประมาณค่าที่

เหมาะสม ได้แก่ ความไม่เอนเอียง ความคงเส้นคงวา ความพอเพียง ความแปรปรวนต่ำสุด ประสิทธิภาพ ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุด (minimum mean squared error) และความไม่แปรเปลี่ยน (invariance) เป็นต้น [1]

วิธีของเบส์เป็นการพิจาณารูปแบบการแจกแจงของค่าพารามิเตอร์ของฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น หรือที่เรียกว่าฟังก์ชันการแจกแจงก่อน (prior distribution function) ร่วมกับฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น (probability density function) เพื่อประมาณค่าพารามิเตอร์เมื่อกำหนดข้อมูล ซึ่งเรียกว่าฟังก์ชันการแจกแจงภายหลัง (posterior distribution function) ซึ่งฟังก์ชันการแจกแจงก่อนนี้จะถูกกำหนดโดยประสบการณ์ส่วนตัวของแต่ละบุคคล ซึ่งบอกถึงระดับความเชื่อของแต่ละบุคคล เมื่อได้ทดลองก็จะมีข้อสนเทศใหม่ขึ้น จะส่งผลให้การแจกแจงความน่าจะเป็นเปลี่ยนแปลงไป [2]

วิธีมาร์คอฟ เชน มอนติคาร์โลเป็นวิธีที่นิยมใช้เมื่อไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของฟังก์ชันการแจกแจงก่อนของตัวแปรสุ่ม โดยประกอบด้วยการสุ่มตัวอย่างตัวแปรจากวิธีมาร์คอฟ เชน (Markov Chain) จากฟังก์ชันการแจกแจงก่อน และสุ่มตัวอย่างแบบกิบส์ (Gibbs sampling) [3] จากนั้นประมาณค่าด้วยมอนติคาร์โล (Monte Carlo) จากฟังก์ชันการแจกแจงภายหลัง [4]

การศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องพบว่า Mir [5] ได้ศึกษาการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบจุดของการแจกแจงทวินามเชิงลบทั่วไป การแจกแจงทวินามเชิงลบและการแจกแจงทวินาม โดยวิธีของเบส์ซึ่งกำหนดให้พารามิเตอร์มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงบีตา ที่มีค่าพารามิเตอร์ คือ a และ b ผลการศึกษาพบว่าค่าประมาณของเบส์จะมีค่าใกล้เคียงกับข้อมูลที่จำลองเมื่อค่า a และ b เท่ากัน และแตกต่างเล็กน้อยเมื่อค่า a และ b ที่เท่ากันมีค่าเพิ่มขึ้น และ Ganji และคณะ [6] ได้ศึกษาการประมาณค่าพารามิเตอร์ r แบบจุดของการแจกแจงทวินามเชิงลบทั่วไป โดยวิธีของเบส์และวิธีการของเบส์เชิงประจักษ์ ทั้งกรณีที่ทราบและไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของประชากร (p) กรณีที่ไม่ทราบค่า p ใช้วิธีการประมาณของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงบีตา โดยกำหนดขนาดตัวอย่างเป็น 10, 20 และ 30 จากประชากรที่มีการแจกแจงทวินามเชิงลบด้วยค่า p เป็น 0.2, 0.5 และ 0.8 และค่าพารามิเตอร์ r เป็น 5, 20 และ 50 กระทำซ้ำ 500 ครั้งในแต่ละสถานการณ์ พบว่าเมื่อค่า p เพิ่มขึ้น ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยจะเพิ่มขึ้นสำหรับค่า r แต่ละระดับ เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้นค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยจะลดลง

สำหรับงานวิจัยนี้ผู้วิจัยสนใจศึกษาข้อมูลที่มีการแจกแจงทวินามเชิงลบ โดยจะสนใจตัวแปรสุ่ม X ที่แทนจำนวนครั้งของการพบสิ่งที่ไม่สนใจหรือล้มเหลวในการทดลองแบร์นูลลี ซึ่งดำเนินการซ้ำ ๆ กันและเป็นอิสระกันจนกระทั่งได้ความสำเร็จครบ r ครั้ง ที่มีพารามิเตอร์ คือ r และ p เมื่อ r คือ จำนวนครั้งของความสำเร็จ และ p คือ ความน่าจะเป็นที่จะได้รับสิ่งที่สนใจหรือสำเร็จในการทดลองแต่ละครั้ง สำหรับการแจกแจงทวินามเชิงลบสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้ในด้านวิทยาศาสตร์ ด้านอุตสาหกรรม ด้านการแพทย์ เป็นต้น ซึ่งการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบจุดที่ได้นั้นจะมีความแม่นยำเพียงใด ขึ้นอยู่กับวิธีการประมาณและปัจจัยอื่น ๆ เช่น ขนาดของตัวอย่าง ค่าพารามิเตอร์ที่กำหนด

จากแนวคิดดังกล่าวผู้วิจัยมีความสนใจที่จะศึกษาการประมาณค่าพารามิเตอร์ p ของการแจกแจงทวินามเชิงลบด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ และวิธีมาร์คอฟ เชน มอนติคาร์โล โดยการจำลองข้อมูลตามสถานการณ์ต่างๆ และเปรียบเทียบการ

ประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 3 วิธี โดยพิจารณาด้วยการทดสอบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยความน่าจะเป็นของความสำเร็จในแต่ละครั้งของตัวอย่างกับความน่าจะเป็นของความสำเร็จในแต่ละครั้งของประชากรโดยใช้การทดสอบที (t-test)

2. วิธีการประมาณค่าในงานวิจัย

งานวิจัยนี้ศึกษาวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ p ของการแจกแจงทวินามเชิงลบ 3 วิธี ดังนี้

2.1 วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (maximum likelihood method)

กำหนดให้ $X_1,\ldots,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีการแจกแจงทวินามเชิงลบมีพารามิเตอร์ r และ p โดยมีฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น ดังนี้

$$f(x_i;r,p)=\begin{cases}\binom{x_i+r-1}{x_i}p^r(1-p)^{x_i} & ,x_i=0,1,2,\ldots\\ 0 & ,x_i \text{ มีค่าอื่น ๆ}\end{cases}$$

จากฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นจะได้ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

$$L(r,p)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;r,p)=\prod_{i=1}^{n}\binom{x_i+r-1}{x_i}p^{rn}(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

ตัวประมาณด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ p เมื่อทราบค่า r หาได้จาก

$$\ln L(r,p)=\ln\prod_{i=1}^{n}\binom{x_i+r-1}{x_i}+rn\ln p+\sum_{i=1}^{n}x_i\ln(1-p)$$

$$\frac{\partial\ln L(r,p)}{\partial p}=\frac{rn}{p}-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{1-p}=0$$

$$0=rn(1-p)-p\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=rn-rnp-p\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$rn=rnp+p\sum_{i=1}^{n}x_i=p\left(rn+\sum_{i=1}^{n}x_i\right)$$

$$p=\frac{rn}{rn+\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

และจะได้ $\frac{\partial^2\ln L(r,p)}{\partial p^2}=-\frac{rn}{p^2}-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{(1-p)^2}<0$ แสดงว่าค่าประมาณที่ได้มีค่าสูงสุด

ดังนั้น ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ p คือ $\hat{p}_{MLE}=\frac{rn}{rn+\sum_{i=1}^{n}x_i}$ เนื่องจากตัวประมาณภาวะน่าจะ

เป็นสูงสุดของ p ซึ่งเป็นตัวประมาณที่เอนเอียงของ p ผู้วิจัยจึงปรับ $\hat{p}_{MLE}$ ดังกล่าวเป็น $\hat{p}_{MLE} = \dfrac{rn-1}{rn+\sum_{i=1}^{n} x_i - 1}$ ซึ่งเป็นตัวประมาณไม่เอนเอียงของ p ซึ่งแสดงได้ดังนี้

ให้ $X_1,\ldots,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีการแจกแจงทวินามเชิงลบ ที่มีพารามิเตอร์ r และ p หรือเขียนแทนได้ว่า $X_i \sim NB(r,p)$ เมื่อ $i=1,\ldots,n$ โดยที่ $0<p<1$ เมื่อทราบค่า r

เนื่องจาก $X_1,\ldots,X_n$ เป็นอิสระกัน จะได้ว่า $Y=\sum_{i=1}^{n} X_i \sim NB(rn,p)$

$$E\left(\frac{rn-1}{rn+Y-1}\right) = \sum_{y=0}^{\infty} \frac{rn-1}{rn+y-1}\frac{(y+rn-1)!}{y!(rn-1)!}p^{rn}(1-p)^{y}$$
$$= \sum_{y=0}^{\infty} \frac{(y+rn-2)!}{y!(rn-2)!}p^{rn}(1-p)^{y} = p\sum_{y=0}^{\infty}\binom{y+rn-2}{y}p^{rn-1}(1-p)^{y}$$
$$= p$$

2.2 วิธีของเบส์ (Bayes' method)

วิธีของเบส์เป็นการพิจารณาฟังก์ชันการแจกแจงก่อนและฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ($L(r,p)$) ที่ได้จากวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด โดยให้ฟังก์ชันการแจกแจงก่อนมีการแจกแจงบีตาที่มีพารา-มิเตอร์ a และ b หรือเขียนได้ว่า $Beta(a,b)$ เนื่องจากการแจกแจงบีตาอยู่ในรูปแบบของวงศ์คู่สังยุค (conjugate function) กับฟังก์ชันการแจกแจงทวินามเชิงลบที่มีพารามิเตอร์ r และ p ซึ่งมีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของการแจกแจงบีตา เป็นดังนี้

$$f(p;a,b) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(a+b)\,p^{a-1}(1-p)^{b-1}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} & ,0<p<1 \\ 0 & ,p \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

โดยมีค่าเฉลี่ย $E(p)=\dfrac{a}{a+b}$ และความแปรปรวน $Var(p)=\dfrac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}$

จะได้ฟังก์ชันการแจกแจงภายหลังจากทฤษฎีของเบส์ [7] คือ

$$h(p|x_1,\ldots,x_n) \propto L(r,p)f(p;a,b)$$
$$\propto \left(\prod_{i=1}^{n}\binom{x_i+r-1}{x_i}p^{rn}(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}x_i}\right)\left(\frac{\Gamma(a+b)\,p^{a-1}(1-p)^{b-1}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\right)$$
$$\propto \prod_{i=1}^{n}\binom{x_i+r-1}{x_i}\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}p^{rn+a-1}(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}x_i+b-1}$$

จากฟังก์ชันการแจกแจงภายหลังพบว่า $h(p|x_1,\ldots x_n) \sim Beta\left(rn+a,\sum_{i=1}^{n}x_i+b\right)$

ดังนั้น ตัวประมาณของเบส์ของ p คือ $\hat{p}_{BAYES} = E\left(p|x_1,\ldots,x_n\right) = \dfrac{rn+a}{rn+a+\sum_{i=1}^{n} x_i + b}$

2.3 วิธีมาร์คอฟ เชน มอนติคาร์โล (Markov Chain Monte Carlo method) [8]

วิธีมาร์คอฟ เชน มอนติคาร์โลเป็นวิธีที่นิยมใช้ เมื่อไม่ทราบฟังก์ชันการแจกแจงก่อนของตัวแปรสุ่ม โดยประกอบด้วยการสุ่มตัวอย่างตัวแปรจากวิธีมาร์คอฟ เชน จากการแจกแจงก่อนของค่าพารามิเตอร์ที่สนใจ และวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบกิบส์ ได้ถูกนำมาใช้ในวิธีของมาร์คอฟ เชน มอนติคาร์โล สำหรับประมาณค่าพารามิเตอร์จากฟังก์ชันการแจกแจงก่อน

ขั้นตอนการสร้างสุ่มตัวอย่างจากวิธีมาร์คอฟ เชน มอนติคาร์โล ประกอบด้วย

2.3.1 กำหนดค่าเริ่มต้น $a^{(t)}$ และ $b^{(t)}$ จากฟังก์ชันการแจกแจงเลขชี้กำลัง

2.3.2 สร้างค่าจากข้อ 2.3.1 มาจำนวน T ค่า เมื่อ $t = 1,2,\ldots,T$

2.3.3 สร้างค่า $p^{(t)}$ จากฟังก์ชันการแจกแจงภายหลังของการแจกแจงบีตาที่ค่าพารามิเตอร์ $a^{(t)}$ และ $b^{(t)}$ จากข้อ 2.3.1

ดังนั้น ตัวประมาณมาร์คอฟ เชน มอนติคาร์โลของ p คือ $\hat{p}_{MCMC} = \dfrac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} p^{(t)}$

3. วิธีการดำเนินการวิจัย

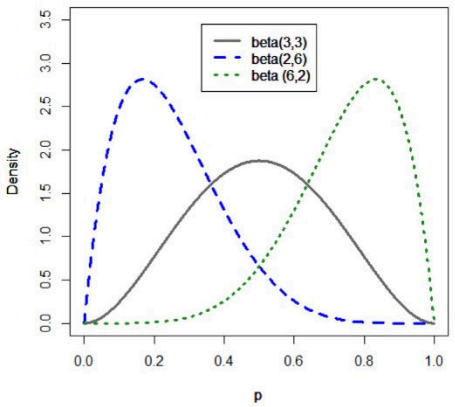
ในการวิจัยครั้งนี้มีขั้นตอนดังนี้

3.1 จำลองข้อมูลที่ใช้ในการวิจัยด้วยโปรแกรม R โดยกำหนดให้ข้อมูลมีการแจกแจงทวินามเชิงลบ โดยมีค่าพารามิเตอร์ของประชากร (p) ของประชากรเท่ากับ 0.2 (น้อย) 0.5 (ปานกลาง) และ 0.8 (มาก) ตามลำดับ และกำหนดค่าพารามิเตอร์ r และขนาดตัวอย่าง (n) ดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 ค่าขนาดตัวอย่าง (n) และค่าพารามิเตอร์ r ของการแจกแจงทวินามเชิงลบ

n	r
10 (เล็ก)	3 และ 7
30 (ปานกลาง)	10 และ 20
50 (ใหญ่)	10 และ 30

3.2 กำหนดค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงก่อนให้มีการแจกแจงบีตาที่มีรูปแบบสมมาตร เบ้ขวา และเบ้ซ้าย โดยมีค่าพารามิเตอร์ (a,b) เท่ากับ (3,3) (2,6) และ (6,2) ตามลำดับ แสดงดังรูปที่ 1



รูปที่ 1 การแจกแจงบีตาที่มีพารามิเตอร์ (a,b) เท่ากับ (3,3) (2,6) และ (6,2)

3.3 โปรแกรมที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ทั้งหมดเขียนโดยโปรแกรม R เวอร์ชั่น 3.2.2 ซึ่งทดลองซ้ำ 1,000 ครั้ง ในแต่ละสถานการณ์

3.4 ทดสอบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของค่า p ที่ได้จากการจำลองข้อมูลกับค่าพารามิเตอร์ของประชากร (p = 0.2 0.5 และ 0.8) โดยใช้การ

ทดสอบที สามารถเขียนสมมติฐานหลัก (H_0) และสมมติฐานทางเลือก (H_1) ในการทดสอบสมมติฐานดังนี้ $H_0 : \mu_{\hat{p}} = p$

$H_1 : \mu_{\hat{p}} \neq p$

โดยที่ $t = \dfrac{\overline{\hat{p}} - p}{S_{\hat{p}} / \sqrt{m}}$ เมื่อ $\overline{\hat{p}}$ แทนค่าเฉลี่ย (mean) ของค่า p ที่ได้จากตัวอย่างในแต่ละสถานการณ์; $S_{\hat{p}} = \sqrt{\dfrac{\sum_{j=1}^{m}\left(\hat{p}_j - \overline{\hat{p}_j}\right)^2}{m-1}}$ แทนส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (SD) ของค่า p ที่ได้จากตัวอย่างในแต่ละสถานการณ์; $\hat{p}_j$ แทนค่าประมาณของค่า p ในการทำซ้ำครั้งที่ j; $\overline{\hat{p}_j}$ แทนค่าเฉลี่ยของค่าประมาณของค่า p; m แทนจำนวนรอบของการทดลอง ในที่นี้ คือ 1,000 รอบ

องศาเสรี เท่ากับ $m-1$

จะปฏิเสธสมมติฐาน H_0 เมื่อ $|t| > t_{\alpha/2,m-1}$

โดยกำหนดให้ α แทนระดับนัยสำคัญของการทดสอบ ในที่นี้เท่ากับ 0.05

สำหรับค่าขอบเขตล่าง (LCI) และค่าขอบเขตบน (UCI) ของค่า p ที่ช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ คำนวณได้จาก $p = \overline{\hat{p}} \pm t_{\alpha/2,m-1}\dfrac{S_{\hat{p}}}{\sqrt{m}}$

4. ผลการวิจัย

ผลการวิจัยนี้ แบ่งเป็น 3 ส่วน ตามวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ คือ วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ และวิธีมาร์คอฟ เชน มอนติคาร์โล

4.1 วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

ค่าเฉลี่ยของตัวประมาณที่ไม่แตกต่างจากค่าพารามิเตอร์ของประชากร (p) ดังนี้

- p = 0.2 และ 0.5 ทุกสถานการณ์
- p = 0.8 เมื่อ n = 10 ทุกค่าพารามิเตอร์ r และ n = 50 r =30

พบว่าตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ได้ดี 15 จาก 18 สถานการณ์ รายละเอียดดังตารางที่ 2

4.2 วิธีของเบส์

ผลการประมาณค่าด้วยวิธีของเบส์แบ่งเป็น 3 วิธี ตามรูปแบบของการแจกแจงก่อน คือ แบบสมมาตร เบ้ขวา และเบ้ซ้าย ตามลำดับ

4.2.1 วิธีของเบส์ ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแบบสมมาตร ($Beta(3,3)$)

ค่าเฉลี่ยของตัวประมาณที่ไม่แตกต่างจากค่าพารามิเตอร์ของประชากรที่กำหนด ดังนี้

- p = 0.5 ที่ n = 30 ทุกค่าพารามิเตอร์ r และ n = 50 r = 30
- p = 0.8 เมื่อ n = 50 r = 30

พบว่าตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ได้ดี 4 จาก 18 สถานการณ์ รายละเอียดดังตารางที่ 3

4.2.2 วิธีของเบส์ ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแบบเบ้ขวา ($Beta(2,6)$)

ค่าเฉลี่ยของตัวประมาณที่ไม่แตกต่างจากค่าพารามิเตอร์ของประชากรที่กำหนด ดังนี้

- p = 0.2 เมื่อ n = 50 ทุกค่าพารามิเตอร์ r
- p = 0.5 เมื่อ n = 30 r = 20 และ n = 50 ทุกค่าพารามิเตอร์ r

พบว่าตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ได้ดี 5 จาก 18 สถานการณ์ รายละเอียดดังตารางที่ 4

4.2.3 วิธีของเบส์ ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแบบเบ้ซ้าย ($Beta(6,2)$)

ค่าเฉลี่ยของตัวประมาณไม่แตกต่างจากค่าพารามิเตอร์ของประชากรที่กำหนด ดังนี้

- p = 0.8 เมื่อ n = 10 r = 7 n = 30 ทุกค่าพารามิเตอร์ r และ n = 50 r = 30

พบว่าตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ได้ดี 4 จาก 18 สถานการณ์ รายละเอียดดังตารางที่ 5

ตารางที่ 2 ค่าเฉลี่ย (mean) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (SD) ค่าขอบเขตล่าง (LCI) และขอบเขตบน (UCI) ของช่วงความเชื่อมั่น 95 % ค่าสถิติทดสอบที (t-test) และค่าพี (p-value) ที่ได้จากวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

p	n	r	Mean	SD	LCI	UCI	t-test	p-value
0.2	10	3	0.20051	0.03475	0.19835	0.20267	0.46385	0.64286
		7	0.20012	0.02221	0.19874	0.20150	0.17489	0.86120
	30	10	0.19998	0.01040	0.19934	0.20063	-0.05491	0.95622
		20	0.20031	0.00741	0.19985	0.20077	1.31638	0.18835
	50	10	0.19984	0.00792	0.19935	0.20034	-0.61965	0.53563
		30	0.20010	0.00462	0.19982	0.20039	0.69592	0.48664
0.5	10	3	0.50083	0.06776	0.49663	0.50504	0.38863	0.69763
		7	0.50084	0.04223	0.49822	0.50346	0.62696	0.53083
	30	10	0.50015	0.01965	0.49893	0.50137	0.24103	0.80958
		20	0.50043	0.01482	0.49951	0.50135	0.92392	0.35575
	50	10	0.50055	0.01626	0.49954	0.50155	1.06196	0.28851
		30	0.50017	0.00895	0.49962	0.50073	0.60618	0.54453
0.8	10	3	0.80182	0.06677	0.79768	0.80597	0.86297	0.38836
		7	0.80122	0.04198	0.79861	0.80382	0.91821	0.35873
	30	10	0.80166	0.02069	0.80038	0.80295	2.54416	0.01110*
		20	0.80115	0.01419	0.80027	0.80203	2.55619	0.01073*
	50	10	0.80143	0.01561	0.80046	0.80240	2.89663	0.00385*
		30	0.80052	0.00886	0.79997	0.80107	1.86853	0.06198

หมายเหตุ : * หมายความว่า ปฏิเสธสมมติฐานหลัก ที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.05

4.3 วิธีมาร์คอฟ เชน มอนติคาร์โล

ค่าเฉลี่ยของตัวประมาณไม่แตกต่างจากค่าพารามิเตอร์ของประชากรที่กำหนด ดังนี้

- p = 0.2 เมื่อ n = 50 r = 10
- p = 0.5 เมื่อ n = 30 ทุกค่าพารามิเตอร์ r และ n = 50 และ r =30
- p = 0.8 เมื่อ n = 30 และ n = 50 ทุกค่าพารามิเตอร์ r

พบว่าตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ได้ดี 8 จาก 18 สถานการณ์ รายละเอียดดังตารางที่ 6

จากตารางที่ 2 ถึงตารางที่ 6 สามารถสรุปวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่ให้ค่าประมาณไม่แตกต่างจากค่าพารามิเตอร์ของประชากร โดยกำหนดสัญลักษณ์แทนความหมายต่าง ๆ ดังนี้

- ML แทนวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด
- Bayes1 แทนวิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงบีตา (3,3)
- Bayes2 แทนวิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงบีตา (2,6)
- Bayes3 แทนวิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงบีตา (6,2)
- MCMC แทนวิธีมาร์คอฟเชนมอนติคาร์โล

แสดงผลดังตารางที่ 7

ตารางที่ 3 ค่าเฉลี่ย (mean) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (SD) ค่าขอบเขตล่าง (LCI) และขอบเขตบน (UCI) ของช่วงความเชื่อมั่น 95 % ค่าสถิติทดสอบที (t-test) และค่าพี (p-value) ที่ได้จากวิธีของเบส์ ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแบบสมมาตร

p	n	r	Mean	SD	LCI	UCI	t-test	p-value
0.2	10	3	0.21735	0.03581	0.21512	0.21957	15.31953	0.00000*
		7	0.20746	0.02255	0.20606	0.20886	10.46396	0.00000*
	30	10	0.20171	0.01044	0.20106	0.20236	5.18179	0.00000*
		20	0.20117	0.00743	0.20071	0.20164	5.00031	0.00000*
	50	10	0.20088	0.00794	0.20039	0.20138	3.51467	0.00046*
		30	0.20045	0.00462	0.20016	0.20074	3.06638	0.00222*
0.5	10	3	0.50756	0.06101	0.50377	0.51134	3.91748	0.00010*
		7	0.50409	0.04042	0.50158	0.50659	3.19673	0.00143*
	30	10	0.50097	0.01946	0.49976	0.50217	1.56995	0.11674
		20	0.50084	0.01475	0.49993	0.50176	1.80807	0.07090
	50	10	0.50104	0.01616	0.50003	0.50204	2.02849	0.04278*
		30	0.50034	0.00893	0.49978	0.50089	1.19397	0.23277
0.8	10	3	0.76374	0.05341	0.76043	0.76706	-21.46756	0.00000*
		7	0.78380	0.03799	0.78144	0.78615	-13.48860	0.00000*
	30	10	0.79741	0.02020	0.79616	0.79867	-4.04848	0.00006*
		20	0.79901	0.01402	0.79814	0.79988	-2.22426	0.02635*
	50	10	0.79887	0.01538	0.79791	0.79982	-2.32464	0.02029*
		30	0.79967	0.00882	0.79912	0.80022	-1.18278	0.23718

หมายเหตุ : * หมายความว่า ปฏิเสธสมมติฐานหลัก ที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.05

ตารางที่ 4 ค่าเฉลี่ย (mean) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (SD) ค่าขอบเขตล่าง (LCI) และขอบเขตบน (UCI) ของช่วงความเชื่อมั่น 95 % ค่าสถิติทดสอบที (t-test) และค่าพี (p-value) ที่ได้จากวิธีของเบส์ ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นเป็นการแจกแจงแบบเบ้ขวา

p	n	r	Mean	SD	LCI	UCI	t-test	p-value
0.2	10	3	0.20795	0.03378	0.20585	0.21004	7.43961	0.00000*
		7	0.20345	0.02198	0.20209	0.20481	4.96211	0.00000*
	30	10	0.20078	0.01038	0.20013	0.20142	2.36700	0.01812*
		20	0.20071	0.00741	0.20025	0.20117	3.01840	0.00261*
	50	10	0.20032	0.00791	0.19983	0.20081	1.29095	0.19702
		30	0.20026	0.00462	0.19997	0.20055	1.79044	0.07369
0.5	10	3	0.47729	0.05561	0.47384	0.48074	-12.91470	0.00000*
		7	0.49037	0.03878	0.48796	0.49277	-7.85715	0.00000*
	30	10	0.49766	0.01926	0.49647	0.49886	-3.83394	0.00013*
		20	0.49918	0.01468	0.49827	0.50009	-1.76061	0.07861
	50	10	0.49905	0.01606	0.49805	0.50004	-1.87979	0.06043
		30	0.49967	0.00891	0.49912	0.50022	-1.16517	0.24423
0.8	10	3	0.70769	0.04733	0.70475	0.71062	-61.67751	0.00000*
		7	0.75677	0.03591	0.75454	0.75900	-38.06631	0.00000*
	30	10	0.79062	0.01993	0.78938	0.79185	-14.88972	0.00000*
		20	0.79558	0.01392	0.79472	0.79644	-10.03959	0.00000*
	50	10	0.79476	0.01526	0.79381	0.79570	-10.87084	0.00000*
		30	0.79829	0.00880	0.79774	0.79883	-6.15324	0.00000*

หมายเหตุ : * หมายความว่า ปฏิเสธสมมติฐานหลัก ที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.05

5. สรุปผลการวิจัย

งานวิจัยนี้เป็นการทดสอบค่าประมาณพารามิเตอร์ของประชากร p ที่ได้จากวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ และวิธีมาร์คอฟ เชน มอนติคาร์โล เพื่อพิจารณาค่าประมาณดังกล่าวนั้นไม่แตกต่างจากค่าพารามิเตอร์ของประชากร ผลการวิจัยพบว่าวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (ML) ส่วนใหญ่ให้ตัวประมาณที่มีประสิทธิภาพ ยกเว้นเมื่อค่า p มีค่ามากและขนาดตัวอย่างใหญ่ ที่ทุกค่าพารามิเตอร์ r สำหรับวิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นแบบสมมาตร (Bayes1) จะเหมาะสมเมื่อค่า p มีค่าปานกลาง และขนาดตัวอย่างปานกลางหรือใหญ่ ที่ทุกค่าพารามิเตอร์ r วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นแบบเบ้ขวา (Bayes2) จะเหมาะสมเมื่อค่า p มีค่าน้อย และขนาดตัวอย่างใหญ่ และเมื่อค่า p มีค่าปานกลาง และขนาดตัวอย่างปานกลางหรือใหญ่ ที่ทุกค่าพารามิเตอร์ r วิธีของเบส์

ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นแบบเบ้ซ้าย (Bayes3) จะเหมาะสมเมื่อค่า p มีค่ามาก ที่ทุกขนาดตัวอย่างและค่าพารามิเตอร์ r และวิธีมาร์คอฟ เชน มอนติคาร์โล (MCMC) เหมาะสมเมื่อค่า p มีค่าอยู่ในระดับปานกลางหรือมากและขนาดตัวอย่างปานกลางหรือใหญ่ ที่ทุกค่าพารามิเตอร์ r ซึ่งผลที่ได้มีความใกล้เคียงกับวิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนแตกต่างกัน ดังนั้นถ้าผู้ใช้งานไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงก่อน วิธีมาร์คอฟ เชน มอนติคาร์โล มีความเหมาะสมที่จะใช้ประมาณค่าพารามิเตอร์ได้ดีเช่นเดียวกัน

ตารางที่ 5 ค่าเฉลี่ย (mean) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (SD) ค่าขอบเขตล่าง (LCI) และขอบเขตบน (UCI) ของช่วงความเชื่อมั่น 95 % ค่าสถิติทดสอบที (t-test) และค่าพี (p-value) ที่ได้จากวิธีของเบส์ ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแบบเบ้ซ้าย

p	n	r	Mean	SD	LCI	UCI	t-test	p-value
0.2	10	3	0.23394	0.03801	0.23158	0.23630	28.24001	0.00000*
		7	0.21475	0.02320	0.21331	0.21619	20.10398	0.00000*
	30	10	0.20344	0.01051	0.20278	0.20409	10.33506	0.00000*
		20	0.20204	0.00746	0.20158	0.20250	8.65461	0.00000*
	50	10	0.20192	0.00798	0.20142	0.20241	7.60902	0.00000*
		30	0.20079	0.00463	0.20051	0.20108	5.42914	0.00000*
0.5	10	3	0.53695	0.06256	0.53307	0.54083	18.67817	0.00000*
		7	0.51761	0.04093	0.51507	0.52015	13.60395	0.00000*
	30	10	0.50426	0.01952	0.50304	0.50547	6.89520	0.00000*
		20	0.50250	0.01477	0.50158	0.50342	5.35014	0.00000*
	50	10	0.50302	0.01619	0.50202	0.50403	5.90188	0.00000*
		30	0.50100	0.00894	0.50045	0.50156	3.54610	0.00041*
0.8	10	3	0.79615	0.05325	0.79284	0.79945	-2.28728	0.02239*
		7	0.79881	0.03791	0.79646	0.80117	-0.99002	0.32240
	30	10	0.80109	0.02019	0.79984	0.80234	1.70654	0.08822
		20	0.80087	0.01402	0.80000	0.80174	1.95400	0.05098
	50	10	0.80109	0.01538	0.80013	0.80204	2.23787	0.02545*
		30	0.80041	0.00882	0.79987	0.80096	1.48595	0.13761

หมายเหตุ : * หมายความว่า ปฏิเสธสมมติฐานหลัก ที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.05

ตารางที่ 6 ค่าเฉลี่ย (mean) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (SD) ค่าขอบเขตล่าง (LCI) และขอบเขตบน (UCI) ของช่วงความเชื่อมั่น 95 % ค่าสถิติทดสอบที (t-test) และค่าพี (p-value) ที่ได้จากวิธีมาร์คอฟ เชน มอนติคาร์โล

p	n	r	Mean	SD	LCI	UCI	t-test	p-value
0.2	10	3	0.20984	0.03559	0.20763	0.21205	8.74123	0.00000*
		7	0.20413	0.02246	0.20273	0.20552	5.81027	0.00000*
	30	10	0.20092	0.01043	0.20027	0.20157	2.78970	0.00538*
		20	0.20078	0.00742	0.20032	0.20124	3.30777	0.00097*
	50	10	0.20040	0.00794	0.19991	0.20089	1.59972	0.10998
		30	0.20029	0.00462	0.20000	0.20058	1.98706	0.04719*
0.5	10	3	0.50852	0.06518	0.50447	0.51256	4.13337	0.00004*
		7	0.50430	0.04160	0.50171	0.50688	3.26595	0.00113*
	30	10	0.50097	0.01960	0.49976	0.50219	1.57193	0.11628
		20	0.50086	0.01481	0.49994	0.50178	1.82831	0.06780
	50	10	0.50104	0.01623	0.50003	0.50205	2.02917	0.04271*
		30	0.50034	0.00894	0.49978	0.50089	1.19138	0.23379
0.8	10	3	0.79117	0.06102	0.78738	0.79495	-4.57797	0.00001*
		7	0.79661	0.04034	0.79410	0.79911	-2.65932	0.00795*
	30	10	0.80056	0.02050	0.79929	0.80183	0.86376	0.38793
		20	0.80060	0.01412	0.79972	0.80148	1.34576	0.17869
	50	10	0.80079	0.01553	0.79983	0.80175	1.61119	0.10745
		30	0.80031	0.00885	0.79976	0.80086	1.09790	0.27251

หมายเหตุ : * หมายความว่า ปฏิเสธสมมติฐานหลัก ที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.05

6. รายการอ้างอิง

[1] Araveeporn, A., 2014, Parameter estimation of poison distribution by using maximum likelihood, Markov Chain Monte Carlo, and Bayes methods, Thammasat Int. J. Sci. Technol. 19(3): 1-14.

[2] ฝันจิต แต้มทอง, 2537, การอนุมานค่าเฉลี่ยประชากรโดยวิธีเบย์เซียน, วิทยานิพนธ์ปริญญาโท, มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, เชียงใหม่, 106 น.

[3] Gelfand, A., Hills, S., Racine-Poon, A. and Smith, A., 1990, Illustration of Bayesian inference in normal data models using Gibbs sampling, J. Amer. Stat. Assoc. 85: 398-409.

ตารางที่ 7 วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่ให้ค่าประมาณไม่แตกต่างจากค่าพารามิเตอร์ของประชากร

p	n = 10		n = 30		n = 50	
	r = 3	r = 7	r = 10	r = 20	r = 10	r = 30
0.2	ML	ML	ML	ML	ML Bayes2 MCMC	ML Bayes2
0.5	ML	ML	ML Bayes1 MCMC	ML Bayes1 Bayes2 MCMC	ML Bayes2	ML Bayes1 Bayes2 MCMC
0.8	ML	ML Bayes3	Bayes3 MCMC	Bayes3 MCMC	MCMC	ML Bayes1 Bayes3 MCMC

[4] อาทิตย์ เทศขำ, 2559, การเปรียบเทียบการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงเลขชี้กำลังด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์และวิธีมาร์คอฟ เชน มอนติคาร์โล, วิทยานิพนธ์ปริญญาโท, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง, กรุงเทพฯ, 97 น.

[5] Mir, K.A., 2008. Sized-biased generalized negative binomial distribution, J. Mod. Appl. Stat. Methods 7: 446-453.

[6] Ganji, M., Eghbali, N. and Azimian, M., 2013, Bayes and empirical Bayes estimation of parameter k in negative binomial distribution, J. Hyperstruct. 2: 185-200.

[7] Bradley, P.C. and Thomas, A.L., 2008, Bayesian Methods for Data Analysis, 3th Ed., Chapman & Hall/CRC, London, 535 p.

[8] Thetkham, A. and Araveeporn, A., 2016, A comparison of parameter estimation of exponential distribution using maximum likelihood, Bayes, and Markov Chain Monte Carlo methods, pp. 55-61, International Conference on Applied Statistics 2015, Phuket.