

การออกแบบคานที่ทำจากวัสดุเชิงประกอบแบบเส้นใยต่อเนื่องทิศทางเดียว โดยการวางเส้นใยตามแนวเส้นทางของความเค้นหลัก

Design of a Unidirectional Continuous Fibre Composite Beam Using Trajectorial Fibre Placement

ดุลยโชติ ชลศึกษ์

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์
มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ศูนย์รังสิต คลองหลวง ปทุมธานี 12120

บทคัดย่อ

ผู้วิจัยได้ทำการพัฒนาโปรแกรมทางไฟไนท์เอลิเมนต์เพื่อทำการคำนวณเส้นทางของความเค้นในวัสดุเชิงประกอบแบบเส้นใยต่อเนื่องทิศทางเดียว ที่มีคุณสมบัติด้านความยืดหยุ่นเป็นแบบอורתโรโทรปิก และทำการทดลองเชิงตัวเลขเพื่อออกแบบชิ้นส่วนที่ทำจากวัสดุเชิงประกอบ เพื่อให้มีความแข็งแรงสูงสุด บนหลักการที่ว่าเส้นใยเป็นส่วนประกอบที่รับแรงดึงได้สูงกว่าวัสดุหุ้มมาก จึงควรวางทิศทางของเส้นใยตามแนวเส้นทางของความเค้นหลักเพื่อให้เส้นใยรับแรงดึงเต็มที่ การออกแบบทำโดยใช้ข้อมูลเส้นทางของความเค้นหลักที่คำนวณได้มาปรับเปลี่ยนทิศทางการเรียงตัวของเส้นใย และมีการทดลองจำลองเส้นทางของความเค้นหลักและการเรียงตัวของเส้นใยไฟเบอร์อยู่ในทิศทางเดียวกัน ซึ่งจากการทดลองออกแบบคานขึ้นที่รับแรงในแนวเฉียงพบว่าวิธีการออกแบบเส้นใยไฟเบอร์ตามเส้นทางของความเค้นหลัก ทำให้การกระจายความเค้นในคานเปลี่ยนแปลงไปจากเดิม โดยพบว่าความเค้นดึงในคานมีค่าสูงขึ้นมาก ขณะที่ความเค้นอัดมีค่าลดลงเมื่อเปรียบเทียบกับค่าความเค้นที่เกิดขึ้นในคานแบบไอโซโทรปิก

คำสำคัญ : ความเค้นในวัสดุเชิงประกอบแบบเส้นใยต่อเนื่องทิศทางเดียว อורתโรโทรปิก การออกแบบเส้นใยไฟเบอร์ตามเส้นทางของความเค้นหลัก ความเค้นดึงในคาน ความเค้นอัด ค่าความเค้นแบบไอโซโทรปิก

Abstract

A finite element based computer program was developed to calculate stress trajectories in unidirectional continuous fibre composite parts, which have orthotropic property. Numerical experiments were conducted to design composite mechanical parts for maximum strength, based on the idea that fibre has much higher strength than matrix. Fibre should be oriented in the principal stress directions, so that the tensile load can be effectively handled. In the design process, first, the stress trajectories were computed and the fibre was oriented according to the trajectories. Then the new trajectories were recomputed and the fibre was reoriented. The iteration process continued until the fibre directions and the trajectories were in good agreement. From the design experiment on a cantilever beam with oblique load, it was observed that the trajectorial designed beam had different stress distribution from the isotropic beam counterpart. The beam's tensile stress was significantly increased while the compressive stress was decreased.

Key words: Trajectorial fibre placement, optimum design, composite materials.

1. บทนำ

การวิบัติหรือการเสียหายของวัสดุเนื่องจากความเค้นจะมีลักษณะทางเรขาคณิตที่สัมพันธ์กับเส้นทางของความเค้น (stress trajectories) ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับชนิดของวัสดุ ซึ่งโดยทั่วไป วัสดุเปราะเช่น เซรามิกส์หรือเหล็กหล่อที่มีส่วนประกอบของกราไฟต์สูง จะเกิดความเสียหายในระนาบที่ตั้งฉากกับเส้นทางของความเค้นหลักที่เป็นความเค้นแบบดึง ส่วน วัสดุเหนียวเช่นโลหะส่วนใหญ่จะมีแนวโน้มที่จะเกิดความเสียหายในระนาบที่เกิดความเค้นเฉือนสูงสุด ซึ่งทำมุม 45 องศากับเส้นทางของความเค้นหลัก (รายละเอียดใน Wulpi [1])

จากลักษณะทางเรขาคณิตของการวิบัติที่ได้กล่าวมาจะพบว่า หากต้องการให้ชิ้นส่วนมีความต้านทานต่อการวิบัติ ก็ควรจะหาทางทำให้โครงสร้างภายในของชิ้นส่วนนั้นเรียงให้สอดคล้องกับเส้นทางของความเค้นที่เกี่ยวข้องกับการวิบัติ ทั้งนี้หากสังเกตการเรียงตัวของโครงสร้างภายในของวัสดุทางธรรมชาติซึ่งผ่านวิวัฒนาการมาอย่างยาวนาน เช่น ต้นไม้ หรือ กระดุกสัตว์ จะพบว่ามีการเรียงตัวของโครงสร้างภายในเป็นไปในทิศทางเดียวกันกับเส้นทางของความเค้นหลักที่เกิดขึ้น (ข้อมูลจาก Guo [2])

วัสดุธรรมชาติ เช่น ต้นไม้ และ กระดุกดังตัวอย่างที่กล่าวมามีลักษณะเป็นวัสดุเชิงประกอบ (composite materials) ซึ่งประกอบวัสดุที่มีคุณสมบัติต่างกันมารวมเป็นวัสดุเดียว มนุษย์ได้พัฒนาวัสดุเชิงประกอบประเภทขึ้นมาในหลายรูปแบบ เช่น วัสดุเชิงประกอบที่เสริมความแข็งแรงด้วยเส้นใย หรือ อนุภาค และ วัสดุเชิงประกอบแบบโครงสร้างรังผึ้ง เป็นต้น วัสดุเชิงประกอบเหล่านี้มักมีความแข็งแรงสูง, น้ำหนักเบา และ ทนต่อการกัดกร่อน จึงเป็นที่นิยมใช้ในทางวิศวกรรม สำหรับวัสดุเชิงประกอบที่เสริมความแข็งแรงด้วยเส้นใยที่ทำการศึกษามีส่วนประกอบหลักคือ เส้นใย (fibre) และวัสดุหล่อหุ้ม (matrix) ซึ่งการเรียงตัวของเส้นใยมีผลต่อความแข็งแรงของวัสดุ

การออกแบบชิ้นส่วนให้ได้ประสิทธิภาพสูงสุด (ในแง่ของความแข็งแรงต่อน้ำหนัก) สามารถทำได้โดยการออกแบบรูปร่างให้เหมาะสม Cholasuk et al. [3], การกระจายวัสดุให้เหมาะสม Bendsoe [4] และ การจัดเรียงเส้นใยในทิศทางที่เหมาะสม (optimum fibre placement) ซึ่งในส่วนหลังอาจสามารถใช้หลักการ เช่นเดียวกับหลักการของธรรมชาติที่กล่าวมา นั่นคือจัดเรียง

โครงสร้างของเส้นใยไฟเบอร์ให้อยู่ในแนวเดียวกับเส้นทางของความเค้นหลัก

การออกแบบที่ดีที่สุดจะต้องรวมทั้งสามแนวทางเข้าด้วยกันซึ่งจัดเป็นปัญหาที่ซับซ้อนอย่างมาก เนื่องจากมีตัวแปรจำนวนมากในการออกแบบ สำหรับงานวิจัยนี้ จะมุ่งทำการศึกษาขั้นต้นในด้านการออกแบบทิศทางการเรียงตัวของเส้นใยในวัสดุเชิงประกอบแบบชั้นเดียวที่ใช้เส้นใยเสริมความแข็งแรงที่มีความยาวต่อเนื่อง แม้ว่าการสร้างวัสดุเชิงประกอบที่ใช้งานจริงส่วนใหญ่จะเป็นการใช้การเสริมเส้นใยแบบหลายชั้น แต่ก็มีแนวโน้มที่จะต้องศึกษาผลของการเรียงตัวของเส้นใยในวัสดุเชิงประกอบแบบชั้นเดียว เพื่อสร้างความเข้าใจในผลของการเรียงเส้นใยที่มีต่อความเค้นในวัตถุ ทั้งนี้มีงานวิจัยที่ศึกษาถึงการจัดเรียงเส้นใยอยู่จำนวนมาก เช่น Gliesche et al. [5], Pedersen and Rozvany [6], Rothe [7] และ Tosh and Kelly [8] อย่างไรก็ตามงานวิจัยส่วนใหญ่จะนำเสนอการออกแบบชิ้นส่วนที่มีรูปร่างเฉพาะ คือ เป็นแผ่นแบนที่มีรูตรงกลางที่รับแรงดึงเป็นหลัก และเน้นที่การนำเสนอผลลัพธ์มากกว่าวิธีการออกแบบ ขณะที่งานวิจัยนี้มุ่งศึกษาผลของการจัดเรียงเส้นใยที่มีต่อการกระจายความเค้นในวัตถุที่มีรูปร่างแบบอื่น

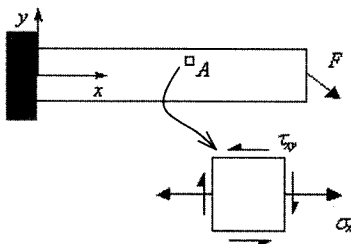
งานวิจัยนี้นำข้อมูลของเส้นทางของความเค้นหลักในวัตถุมาใช้เป็นแนวทางในการออกแบบการเรียงตัวของเส้นใยในชิ้นส่วนที่ทำจากวัสดุเชิงประกอบ โดยทำการพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการออกแบบการเรียงตัวของเส้นใยในวัสดุเชิงประกอบแบบทิศทางเดียวตามทิศทางของความเค้นหลัก แล้วทำการทดลองออกแบบชิ้นส่วนที่มีรูปร่างและลักษณะการรับแรงหลายประเภท จากนั้นจึงทำการศึกษาลักษณะที่ได้ สำหรับตัวอย่างที่เลือกมานำเสนอในบทความนี้เป็นกรณีศึกษาของคานยื่นที่รับแรงในแนวเฉียง ทั้งนี้เนื่องจากชิ้นส่วนประเภทคานจะต้องรับความเค้นดึงและอัดในสัดส่วนที่ใกล้เคียงกัน ซึ่งอาจทำให้ไม่สามารถใช้เส้นใยได้อย่างมีประสิทธิภาพในบริเวณที่รับความเค้นอัด

2. เส้นทางของความเค้น

เส้นทางของความเค้นหลักเป็นข้อมูลที่ช่วยให้ทำนายได้ว่า ความเสียหายของวัตถุจะเกิดในแนวหรือทิศทางใด ซึ่งการคำนวณเส้นทางจะต้องเริ่มจากการคำนวณความเค้น แล้ว

คำนวณหาทิศทางของความเค้นหลัก แล้วสร้างเป็นสนามของทิศทางของความเค้น จากนั้นจึงหาวิธีการที่จากลากเส้นทางของความเค้นให้เป็นไปตามสนามของทิศทางดังกล่าว

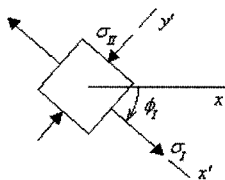
ความเค้นหรือความเข้มของแรงภายในวัตถุเป็นปริมาณแบบเทนเซอร์ ที่มีขนาดในหลายทิศทาง เราสามารถคำนวณหาความเค้นที่จุดต่างๆในวัตถุโดยใช้โปรแกรมทางไฟไนท์เอลิเมนต์ หรือ ใช้สมการทางกลศาสตร์ของแข็ง ซึ่งในการคำนวณเหล่านี้ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นความเค้นในทิศทางที่อ้างอิงกับระบบพิกัดอ้างอิง $x-y$ ที่ผู้คำนวณตั้งขึ้นมาเองดังรูปที่ 1 โดยเมื่อมองในสองมิติความเค้นที่ได้สามารถเขียนได้ในรูปเมตริกซ์ดังสมการ (1)



รูปที่ 1 ความเค้นที่จุด A ในทิศทางที่อ้างอิงกับแกน $x-y$

$$[S] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \quad (1)$$

อย่างไรก็ตามวัตถุไม่ได้รับรู้ถึงแกนอ้างอิงเหล่านี้ แต่จะรับรู้ถึงค่าความเค้นในทิศทางที่มีผลต่อการเสียหายของมัน โดยในวัสดุเปราะทิศทางที่มีผลต่อความเสียหายคือทิศทางที่มีความเค้นมากที่สุด ที่เรียกว่า “ทิศทางหลัก” (principal direction) ดังแสดงโดยแกนอ้างอิง $x' - y'$ ในรูปที่ 2 ซึ่งการคำนวณหาทิศทางหลัก ณ จุดใดๆ ในรูปของมุมที่ทำต่อแกน x สามารถทำได้โดยใช้สมการ (2)



รูปที่ 2 ทิศทางหลักที่จุด A (กรณีนี้ ϕ_p มีค่าเป็นลบ)

$$\phi_I = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) \quad (2)$$

เมื่อใช้แกนอ้างอิงตามทิศทางหลักนี้ค่าของความเค้นที่คำนวณได้ในแนว x' จะเป็นค่าสูงสุด ($\sigma_{x'} = \sigma_I$) เรียกว่า และในแนว y' จะเป็นค่าต่ำสุด ($\sigma_{y'} = \sigma_{II}$) โดยในทิศทางหลักนี้จะไม่มีความเค้นเฉือน หรือเขียนในรูปของเมตริกซ์ได้เป็น

$$[S'] = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 \\ 0 & \sigma_{II} \end{bmatrix} \quad (3)$$

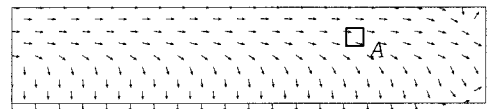
ค่าความเค้น σ_I และ σ_{II} คือความเค้นหลัก (principal stresses) ที่เกิดขึ้นในทิศทาง ϕ_I และ ϕ_{II} ตามลำดับ และในทิศทางที่ท่ามุม 45 องศากับทิศทางหลักจะเป็นทิศทางที่เกิดความเค้นเฉือนสูงสุด $\sigma_{\max}$ โดยเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\phi_{II} = \phi_I + \frac{\pi}{2} \quad (4)$$

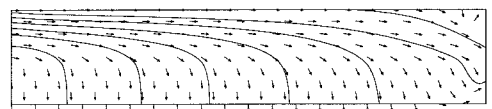
$$\phi_c = \phi_I + \frac{\pi}{4} \quad (5)$$

วัสดุเหนียวมักเกิดการเสียหายในแนวที่ขนานกับ ϕ_c ขณะที่วัสดุเปราะจะเกิดความเสียหายในแนวระนาบที่ตั้งฉากกับ ϕ_I

หากเรานำทิศทางที่คำนวณได้ที่จุดต่างๆมาเขียนลงในรูปของวัตถุ ก็จะได้สนามของเวกเตอร์ดังรูปที่ 3 ซึ่งดูคล้ายกับการเขียนเวกเตอร์ของความเร็วในการไหลในปัญหาด้านกลศาสตร์ของไหล ซึ่งเราสามารถลากเส้นขนานกับทิศทางในสนามของเวกเตอร์นี้เพื่อให้ได้เส้นทางของความเค้นในชิ้นส่วนได้ดังรูปที่ 4



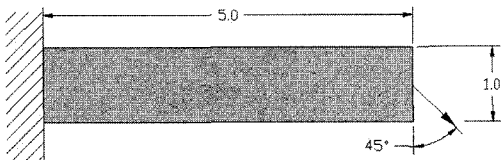
รูปที่ 3 สนามของเวกเตอร์ของความเค้นหลักบนคานที่รับแรงตามรูปที่ 1



รูปที่ 4 เส้นทางของความเค้นหลักบนสนามของเวกเตอร์ของความเค้นหลักบนคานที่รับแรงตามรูปที่ 1

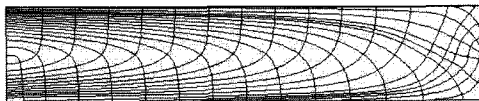
ทั้งนี้เมื่อสังเกตเกี่ยวกับเส้นทางของความเค้นคือ จุดต่างๆ บนเส้นทางของความเค้นไม่จำเป็นต้องมีความเค้นเท่ากัน และเส้นทางความเค้นไม่เหมือนกับเส้นสายธารในการไหลแบบศักย์ที่หาได้จากสมการแก๊สมการลาปลาซ

เส้นทางความเค้นที่ได้จากการคำนวณตามวิธีการข้างต้นสำหรับวัสดุแบบไอโซทรอปิก ที่สมมุติค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น E เป็น 1. และค่าสัดส่วนของโพซอง $\nu = 0.3$ แสดงในกรณีตัวอย่างของคานยื่นที่รับแรงในแนวเฉียงเป็นมุม 45 องศาตามรูปที่ 5 โดยเส้นทางของความเค้นหลัก σ_I และ σ_{II} จะถูกนำเสนอบนรูปเดียวกันซึ่งผู้อ่านสามารถแยกเส้นทางทั้งสองออกจากกันได้โดยใช้หลักการของกลศาสตร์ของแข็งพิจารณา

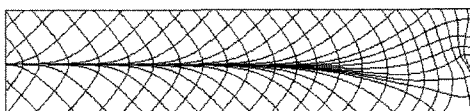


รูปที่ 5 คานยื่นที่รับแรงในแนวเฉียง 45 องศา

ผลการคำนวณเส้นทางของความเค้นหลักแสดงในรูปที่ 7 ซึ่งสามารถสังเกตปรากฏการณ์การเกิดจุดรวมของความเค้นบริเวณที่แรงกระทำ ที่ทำให้เส้นทางของความเค้นมีการหักเหไปตามทิศทางของแรง ส่วนในรูปที่ 7 แสดงเส้นทางของความเค้นเฉือนสูงสุดทั้งสองทิศทาง



รูปที่ 6 เส้นทางของความเค้นหลัก σ_I และ σ_{II} ในคานยื่นที่รับแรงในแนวเฉียงเป็นมุม 45 องศา



รูปที่ 7 เส้นทางของความเค้นเฉือนสูงสุดในคานยื่นที่รับแรงในแนวเฉียงเป็นมุม 45 องศา

3. การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของวัสดุเชิงประกอบสำหรับการวิเคราะห์ด้วยวิธีการทางไฟไนต์เอลิเมนต์

การทำนายค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นและอัตราส่วนของโพซอง ในวัสดุเชิงประกอบแบบทิศทางเดียวสามารถทำได้หลายวิธี เช่น การใช้ทฤษฎีทางด้านกลศาสตร์ของแข็ง, ใช้การวิเคราะห์เชิงตัวเลข, ใช้วิธีการแปรผัน, และ ใช้ตัวแปรปรับแต่งสมการทางทฤษฎีให้ได้ค่าใกล้เคียงกับข้อมูลจากการทดลอง รายละเอียดสำหรับวิธีต่างๆ หาได้จาก Daniel [9]

งานวิจัยนี้เป็นการศึกษาในเบื้องต้น จึงจะใช้การทำนายด้วยสมการที่ได้จากทฤษฎีทางกลศาสตร์ของแข็งตามแนวทางใน Daniel [9] โดยตัวแปรที่มีผลต่อคุณสมบัติของวัสดุเชิงประกอบประกอบด้วย

ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นของเส้นใยในแนวแกน	E_{II}
ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นของเส้นใยในแนวขวาง	$E_{II'}$
ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นของวัสดุห่อหุ้ม	E_m
ค่าโมดูลัสเฉือนในแนวระนาบของเส้นใย	G_{12}
ค่าโมดูลัสเฉือนของวัสดุห่อหุ้ม	G_m
	$G_m = \frac{E_m}{2(1+\nu_m)}$

ค่าอัตราส่วนของโพซองของเส้นใย	ν_f
ค่าอัตราส่วนของโพซองของวัสดุห่อหุ้ม	ν_m
สัดส่วนปริมาตรของเส้นใย	V_f
และ สัดส่วนปริมาตรของวัสดุห่อหุ้ม	$V_m = 1 - V_f$
โดยคุณสมบัติต่างๆ ประเมินได้ดังนี้	

โมดูลัสความยืดหยุ่นในทิศทางตามแนวเส้นใย

ในทิศทางนี้เส้นใยจะเป็นวัสดุหลักที่รับแรง โดยการประมาณคุณสมบัติจะใช้สมมุติฐานว่าเกิดความเครียดคงที่ กล่าวคือทั้งเส้นใยและวัสดุห่อหุ้มจะถูกดึงให้ยืดออกเท่าๆกัน ซึ่งเป็นสมมุติฐานที่ให้การทำนายใกล้เคียงกับผลการทดลอง โดยมีสมการดังนี้

ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นในทิศทางตามแนวเส้นใย,

$$E_1 = V_f E_{II'} + V_m E_m \quad (6)$$

ค่าอัตราส่วนของโพซอง

$$\nu_{12} = V_f \nu_{12f} + V_m \nu_m \quad (7)$$

โมดูลัสของความยืดหยุ่นในทิศทางตามขวางกับแนวเส้นใย

คุณสมบัติตามแนวขวางประมาณโดยใช้สมมุติฐานของการกระจายความเค้นสม่ำเสมอซึ่งนำไปสู่ความสัมพันธ์คือค่าโมดูลัสความยืดหยุ่น

$$E_2 = \frac{E_{2f}E_m}{V_fE_m + V_mE_{2f}} \quad (8)$$

ค่า E_m ในสมการ (8) มักถูกแทนที่ด้วย

$$E'_m = \frac{E_m}{1 + \nu_m^2} \quad (9)$$

ทั้งนี้เพื่อแทนผลที่เกิดจากความแข็งแรงของเส้นใยในทิศทางของเส้นใย ทำให้สมการ (8) ถูกเขียนใหม่ในรูป

$$E_2 = \frac{E_{2f}E'_m}{V_fE'_m + V_mE_{2f}} \quad (10)$$

อย่างไรก็ตามสมการ (10) ยังให้ค่าที่มีแนวโน้มต่ำกว่าผลการทดลอง ทั้งนี้เนื่องจากในความเป็นจริงบริเวณรอยต่อระหว่างเส้นใยและวัสดุห่อหุ้มจะมีคุณสมบัติที่ทฤษฎีไม่สามารถทำนายได้ การจะทำนายค่าให้ใกล้เคียงกับความเป็นจริงจะต้องอาศัยการปรับแต่งสมการ (10) ด้วยตัวแปรที่นำมาจากการเปรียบเทียบผลการทดลองกับทฤษฎี (รายละเอียดใน Halpin [10]) ซึ่งทำให้เกิดความไม่สะดวกในการคำนวณ งานวิจัยนี้จึงใช้สมการ (10) เพื่อศึกษาแนวโน้มเบื้องต้น โดยทฤษฎีความยืดหยุ่น ค่าอัตราส่วนของโพของอีกตัวหนึ่งจะหาได้จาก

$$\nu_{21} = \frac{E_2\nu_{12}}{E_1} \quad (11)$$

โมดูลัสเฉือน

เช่นเดียวกับคุณสมบัติในแนวขวาง, ค่าโมดูลัสเฉือน ขึ้นกับคุณสมบัติในบริเวณรอยต่อระหว่างเส้นใยและวัสดุห่อหุ้มซึ่งทฤษฎีไม่สามารถทำนายได้ สมการ (12) ที่ใช้ในงานวิจัยนี้เป็น การประมาณทางทฤษฎีที่อาจให้ค่าที่ต่ำกว่าความเป็นจริง แต่สามารถให้แนวโน้มในการศึกษาเบื้องต้นได้ คือ ค่าโมดูลัสเฉือน,

$$G_{12} = \frac{G_{12}G_m}{V_fG_m + V_mG_{12f}} \quad (12)$$

หลังจากที่สามารถประมาณคุณสมบัติของวัสดุเชิงประกอบตามที่กล่าวมา การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จะทำโดยการเพิ่มความสัมพันธ์ระหว่างสัดส่วนโดยปริมาตรของเส้น

ใย ที่มีต่อคุณสมบัติด้านความยืดหยุ่น เข้าไปในแบบจำลองเดิม ซึ่งใช้สำหรับวัสดุประเภทไอโซทรอปิก ในโปรแกรมทางไฟไนต์เอลิเมนต์ที่อยู่ในรูปแบบที่อ้างอิงกับพิกัด $x-y$ ตามสมการ (13) โดยที่ตัวห้อย s แทนทิศทางเฉือนบนระนาบ $x-y$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & 0 \\ Q_{yx} & Q_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{bmatrix} \quad (13)$$

หรือ $[\sigma] = [Q][\varepsilon]$

โดยที่เมตริก $[Q]$ คือเมตริกของความแกร่ง (stiffness matrix) ค่าต่างๆในเมตริกของความแกร่งเป็นดังนี้

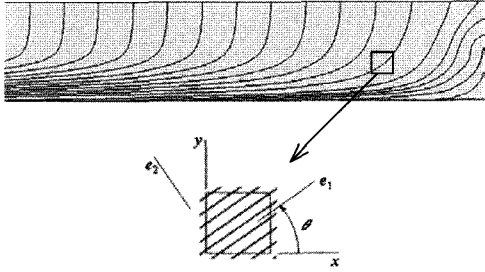
$$\begin{aligned} Q_{xx} &= Q_{yy} = \frac{E}{1 - \nu^2} \\ Q_{xy} &= Q_{yx} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \\ Q_{ss} &= G = \frac{\nu E}{2(1 + \nu)} \end{aligned} \quad (14)$$

เมื่อใช้กับวัสดุเชิงประกอบที่มีคุณสมบัติแบบอโรทรอปิก ที่มีค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่นในทิศทาง x และ y ไม่เท่ากัน จะต้องดัดแปลงสมการ (14) ให้อยู่ในรูปดังนี้

$$\begin{aligned} Q_{xx} &= \frac{E_x}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} \\ Q_{yy} &= \frac{E_y}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} \\ Q_{xy} &= \frac{\nu_{yx}E_x}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} \\ Q_{yx} &= \frac{\nu_{xy}E_y}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} \\ Q_{ss} &= G \end{aligned} \quad (15)$$

แต่ค่าโมดูลัสต่างๆที่คำนวณได้ในวัสดุเชิงประกอบจากสมการ (6) ถึง (12) เป็นค่าที่อ้างอิงกับทิศทางในแนวเส้นใย (แนว e_1) และแนวขวางกับเส้นใย (แนว e_2) ที่วัดมุมการเสริมเส้นใยในทิศทางที่เปลี่ยนแปลงไปตามตำแหน่งบนวัตถุ เมื่อพิจารณา ณ จุดเล็กๆบนวัตถุในรูปที่ 8 จะเห็นว่าเส้นใยวางตัวในแนว e_1 ซึ่งทำมุม θ กับแกน x และเมื่อคำนวณค่าโมดูลัสต่างๆโดยอ้างอิง กับ

ทิศทาง e_1 - e_2 จะได้เมตริกซ์ของความแกร่งเป็นไปตามสมการ (16) และ (17)



รูปที่ 8 การพิจารณาแกนอ้างอิง ณ จุดเล็กๆ บนวัตถุเชิงประกอบที่มีการเสริมเส้นใยในทิศทางที่เปลี่ยนแปลง

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} \quad (16)$$

หรือ $[\sigma'] = [Q'][\varepsilon']$

โดยที่

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{22} &= \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{21} &= \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{66} &= G \end{aligned} \quad (17)$$

ดังนั้นจึงต้องมีการแปลงค่าต่างๆกลับมามีอยู่ในทิศทาง x - y เพื่อให้โปรแกรมไฟไนท์เอลิเมนต์เดิมทำงานได้อย่างถูกต้อง ซึ่งการแปลงค่าทำได้โดยใช้สมการ (18)

$$[Q] = [T^{-1}][Q'][T] \quad (18)$$

เมื่อ

$$[T] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix}$$

$$c = \cos\theta, \quad s = \sin\theta$$

ซึ่งเมื่อทำการคูณเมตริกซ์ตามสมการ (18) จะได้

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix} \quad (19)$$

โดยที่

$$\begin{aligned} Q_{xy} &= c^4Q_{11} + s^4Q_{22} + 2c^2s^2Q_{12} + 4c^2s^2Q_{66} \\ Q_{yy} &= s^4Q_{11} + c^4Q_{22} + 2c^2s^2Q_{12} + 4c^2s^2Q_{66} \\ Q_{yx} &= c^2s^2Q_{11} + c^2s^2Q_{22} + (c^4 + s^4)Q_{12} - 4c^2s^2Q_{66} \\ Q_{xs} &= c^3sQ_{11} - cs^3Q_{22} + (cs^3 - c^3s)Q_{12} + 2(cs^3 - c^3s)Q_{66} \\ Q_{ys} &= cs^3Q_{11} - c^3sQ_{22} + (c^3s - cs^3)Q_{12} \\ &\quad + 2(c^3s - cs^3)Q_{66} \\ Q_{ss} &= c^2s^2Q_{11} + c^2s^2Q_{22} - 2(c^2s^2)Q_{12} \\ &\quad + (c^2 + s^2)^2Q_{66} \end{aligned}$$

หากจุดเล็กๆในรูปที่ 8 เป็นหนึ่งเอลิเมนต์ในการแก้ปัญหาด้วยวิธีทางไฟไนท์เอลิเมนต์ จะต้องทำการดัดแปลงโปรแกรมเดิมให้คำนวณค่าในเมตริกซ์ $[Q]$ ที่ทุกๆเอลิเมนต์ตามสมการ (19) แล้วจึงทำการแก้สมการหาความเครียดและความเค้นด้วยวิธีการทางไฟไนท์เอลิเมนต์ตามปกติ โดยสมมุติว่าชิ้นส่วนทำจากวัสดุเนื้อเดียวที่มีคุณสมบัติไม่สม่ำเสมอ โดยมีลักษณะการยึดหยุ่นเป็นแบบออร์โทโทรปิก ผลการคำนวณความเค้นที่ได้จะเป็นค่าความเค้นเฉลี่ยในแต่ละเอลิเมนต์ ซึ่งสามารถนำมาแยกเป็นความเค้นในเส้นใย และความเค้นในวัสดุท่อหุ้มได้ภายหลัง

4. โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการออกแบบการเรียงตัวของเส้นใยในวัสดุเชิงประกอบ

สำหรับโปรแกรมที่ใช้ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้ทำการพัฒนาขึ้นจาก Source Code พื้นฐานที่เผยแพร่โดย Betti [11] โดยนำวิธีการหาเมตริกซ์ความแกร่งที่กล่าวถึงในหัวข้อที่ 3 มาใช้ในการดัดแปลงโปรแกรม

นอกจากนี้ได้มีการดัดแปลงโปรแกรมใหม่เพื่อทำการออกแบบจัดเรียงเส้นใย จากหลักการที่ว่าเส้นใยสามารถทนต่อความเค้นดึงได้สูงกว่าวัสดุท่อหุ้มมาก แต่ไม่สามารถรับความเค้นอัดได้ ดังนั้นการออกแบบทิศทางการเรียงตัวของเส้นใยจึงควรทำให้อยู่ในแนวที่เกิดความเค้นดึงสูงสุด ซึ่งก็คือทิศทางที่เกิดความเค้นหลัก σ_1 แต่การเปลี่ยนทิศทางการเรียงตัวของเส้นใยจะทำให้ทิศ

ทางของความเค้นในวัตถุเปลี่ยนแปลงไปจากเดิม จึงต้องมีการวิเคราะห์ซ้ำ และปรับเปลี่ยนทิศทางของเส้นใยไปเรื่อยๆ จนกว่าทิศทางของเส้นใย และทิศทางของความเค้นหลักจะสอดคล้องกันมากที่สุด โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้จึงต้องทำการคำนวณซ้ำจนกว่าจะได้รับความสอดคล้องตามที่กล่าวมา โดยโปรแกรมที่ดัดแปลงแล้วมีขั้นตอนการทำงานดังต่อไปนี้

1. อ่านข้อมูลรูปร่างและแรง โดยในครั้งแรกให้พิจารณาให้เป็นวัสดุแบบไอโซทรอปิกและข้ามไปยังขั้นตอนที่ 4
2. อ่านข้อมูลรูปร่าง, แรง, สัดส่วนของปริมาตรของเส้นใย และ ทิศทางของเส้นใยในแต่ละเอลิเมนต์
3. ทำการคำนวณเมตริก $[Q]$ ตามสมการ (19)
4. สร้างระบบสมการทางไฟไนท์เอลิเมนต์ และแก้สมการหาความเครียดและคำนวณความเค้น
5. คำนวณหาทิศทางของความเค้นหลักในแต่ละเอลิเมนต์ (ใช้วิธีการตามหัวข้อที่ 2)
6. เปลี่ยนวัสดุเป็นวัสดุเชิงประกอบที่มีการจัดเรียงเส้นใยตามทิศทางของความเค้นหลักในแต่ละเอลิเมนต์
7. ย้อนกลับไปยังขั้นตอนที่ 2 จนกว่าทิศทางของความเค้นหลักจะสอดคล้องกับทิศทางการเรียงตัวของเส้นใยจึงยุติ

5. การทดลองออกแบบการเรียงตัวของเส้นใย

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่นำเสนอในหัวข้อที่ 4 ถูกนำไปใช้ในการทดลองออกแบบการเรียงตัวของเส้นใย โดยใช้กรณีตัวอย่าง จากหัวข้อที่ 2 ในการทดลองจะเริ่มโดยกำหนดให้ชิ้นส่วนทำจากวัสดุเนื้อเดียวแบบไอโซทรอปิกโดยใช้คุณสมบัติของวัสดุท่อหุ้มในการคำนวณทิศทางความเค้นเริ่มต้น จากนั้นจึงทำการเสริมเส้นใยด้วยความหนาแน่น 50 เปอร์เซ็นต์โดยปริมาตร แล้วจึงทำการเปลี่ยนทิศทางการเรียงเส้นใยไปตามทิศทางความเค้นหลักที่คำนวณได้ จนกระทั่งทิศทางเส้นใยและทิศทางของความเค้นหลักเป็นทิศเดียวกัน การคำนวณทำแบบไร้หน่วยโดยกำหนดแรงกระทำให้มีขนาดเป็น $\sqrt{2}$ หน่วย และความหนาเป็น 1 หน่วย ส่วนค่าคุณสมบัติด้านความยืดหยุ่นเป็นดังนี้

$$\text{ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นของเส้นใย} \quad E_{lf} = E_{2f} = 100$$

$$\text{ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นของวัสดุท่อหุ้ม} \quad E_m = 1$$

$$\begin{aligned} \text{ค่าอัตราส่วนของโพรงของเส้นใย} \quad v_f &= 0.25 \\ \text{ค่าอัตราส่วนของโพรงของวัสดุท่อหุ้ม} \quad v_m &= 0.3 \\ \text{สัดส่วนปริมาตรของเส้นใย} \quad V_f &= 0.5 \end{aligned}$$

ผลการออกแบบแสดงในรูปที่ 9 ถึง 11 โดยการเปรียบเทียบความเค้นในคานที่ทำจากวัสดุไอโซทรอปิก และคานที่ทำจากวัสดุเชิงประกอบแสดงในตารางที่ 1

เส้นทางและการกระจายความเค้นหลัก σ_I แสดงในรูปที่ 9 (ก) และ (ข) สำหรับคานที่ทำจากวัสดุแบบไอโซทรอปิก (ไม่มีเส้นใย) และ วัสดุเชิงประกอบที่มีการวางเส้นใยตามเส้นทางของความเค้นหลักตามลำดับ ซึ่งในรูปที่ 9 (ข) ทิศทางของเส้นใยและทิศทางของความเค้นหลัก σ_I คือทิศทางเดียวกัน หากสังเกตรูปทั้งสองจะพบว่าเส้นทางความเค้นในรูปที่ 9 (ก) และ (ข) มีความแตกต่างกันคือเส้นทางในรูป 10 (ข) จะวิ่งชิดขอบบนของคานมากกว่า การจัดเรียงเส้นใยตามทิศทางความเค้นหลักทำให้ความเค้นหลักเพิ่มขึ้นโดยในกรณีนี้ความเค้นหลัก σ_I เพิ่มขึ้นจากคานที่ใช้วัสดุไอโซทรอปิกถึง 130 เปอร์เซ็นต์ อย่างไรก็ตามอาจบอกได้ว่าการกระจายของความเค้นหลัก σ_I ในรูปที่ 9 (ข) เป็นเสมือนการกระจายของความเค้นดึงในเส้นใย เนื่องจากในทางทฤษฎีใช้สมมติฐานให้วัสดุท่อหุ้มและเส้นใยมีระยะยึดตัวเท่ากันในทิศทางของเส้นใย ดังนั้นเส้นใยที่มีค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่นสูงกว่าวัสดุท่อหุ้มถึง 100 เท่าจึงรับภาระไปเกือบทั้งหมด

รูปที่ 10 (ก) และ (ข) แสดงการกระจายของความเค้นหลัก σ_{II} สำหรับคานที่ทำจากวัสดุแบบไอโซทรอปิก (ไม่มีเส้นใย) และ วัสดุเชิงประกอบที่มีการวางเส้นใยในทิศทางที่เหมาะสม ตามลำดับ ซึ่งจากตารางที่ 1 พบว่าความเค้นหลัก σ_{II} ในกรณีของวัสดุเชิงประกอบลดลงประมาณ 40 เปอร์เซ็นต์ ความเค้นส่วนนี้เป็นความเค้นอัดที่วัสดุท่อหุ้มและวัสดุเชิงประกอบต้องรับเท่าๆกันในทางทฤษฎี ส่วนรูปที่ 11 แสดงการเปรียบเทียบความเค้น von Mises ซึ่งพบว่ามีการกระจายความเค้นในวัสดุเชิงประกอบมีการเปลี่ยนแปลงไม่มากโดยที่บริเวณส่วนบนของคานซึ่งสามารถต้านทานความเค้นดึงได้สูงก็จะมีค่าความเค้นสูงตามไปด้วย

ตารางที่ 1 ความเค้นสูงสุดที่เกิดในคานที่ทำจากวัสดุโพรทอปิก (ก) และคานที่ทำจากวัสดุเชิงประกอบ (ข)

ความเค้นสูงสุด (ไร้หน่วย)	(ก)	(ข)
σ_I	31	77
σ_{II}	(-)29	(-)17
von Mises	31	77



รูปที่ 9 ผลการคำนวณ เส้นทางของความเค้นและการกระจายความเค้นหลัก σ_I ในคานยื่นที่รับแรงในแนวตั้งที่ทำด้วยวัสดุแบบโพรทอปิก (ก) และทำด้วยวัสดุเชิงประกอบที่มีการเรียงเส้นใยตามเส้นทางของความเค้นหลัก (ข)



รูปที่ 10 ผลการคำนวณ การกระจายความเค้นหลัก σ_{II} ในคานยื่นที่รับแรงในแนวเฉียง ที่ทำด้วยวัสดุแบบโพรทอปิก (ก) และทำด้วยวัสดุเชิงประกอบที่มีการเรียงเส้นใยตามเส้นทางของความเค้นหลัก (ข)



รูปที่ 11 ผลการคำนวณ การกระจายความเค้น von Mises ในคานยื่นที่รับแรงในแนวเฉียงที่ทำด้วยวัสดุแบบโพรทอปิก (ก) และทำด้วยวัสดุเชิงประกอบที่มีการเรียงเส้นใยตามเส้นทางของความเค้นหลัก (ข)

6. บทสรุป

งานวิจัยนี้นำข้อมูลเส้นทางของความเค้นหลักมาใช้ในการออกแบบการเรียงตัวของเส้นใยเสริมแรงในวัสดุเชิงประกอบ โดยผู้วิจัยได้ทำการดัดแปลงโปรแกรมไฟไนท์เอลิเมนต์ขึ้นพื้นฐานให้สามารถประมาณค่าความเครียดและความเค้นที่เกิดขึ้นในวัสดุเชิงประกอบได้ และนำโปรแกรมนี้ออกแบบการเรียงตัวของเส้นใยให้สอดคล้องกับเส้นทางของความเค้น ซึ่งการหาทิศทางของเส้นใยนี้จะต้องมีการคำนวณซ้ำและปรับเปลี่ยนทิศทางของเส้นใยหลายครั้งจนกว่าทิศทางของเส้นใยและทิศทางของความเค้นหลักจะเป็นทิศทางที่ใกล้เคียงกันที่สุด เนื่องจากในการเปลี่ยนแปลงทิศทางของเส้นใยแต่ละครั้งจะทำให้การกระจายของความเค้นในวัสดุเปลี่ยนไป

จากผลการทดลองออกแบบในกรณีตัวอย่างของคานยื่นที่รับแรงแบบเฉียง พบว่าการกระจายของความเค้นในวัสดุเชิงประกอบเป็นไปตามหลักการของกลศาสตร์ของแข็งในแง่ของการกระจายโหลด กล่าวคือส่วนใดแข็งแรงก็จะรับความเค้นมาก ส่วนใดอ่อนแอก็จะรับความเค้นน้อย และข้อสรุปที่เด่นชัดคือ การวางเส้นใยในทิศทางเดียวกับเส้นทางของความเค้นหลัก σ_I จะทำให้ความเค้นหลัก σ_{II} โดยเฉลี่ยในวัสดุมีค่าน้อยลง หรืออาจ

กล่าวได้ว่าความเค้นอัดในวัสดุลดลง แต่ความเค้นดึงจะเพิ่มขึ้น ซึ่งส่วนที่เพิ่มขึ้นนี้จะถูกแบกรับโดยเส้นใยเป็นหลัก อันเป็นไปตามวัตถุประสงค์ของการออกแบบที่จะให้เส้นใยได้ถูกใช้งานอย่างมีประสิทธิภาพ เนื่องจากเส้นใยความสามารถในการรับความเค้นดึงสูงแต่ไม่สามารถรับความเค้นอัดได้ ขณะที่วัสดุห่อหุ้มที่มีความแข็งแรงต่ำกว่าก็จะรับความเค้นน้อยลง อย่างไรก็ตามในกรณีตัวอย่างที่น่าเสนอพบว่าความเค้นดึงมีค่าสูงขึ้นอย่างมาก ซึ่งอาจเป็นสิ่งที่ไม่พึงประสงค์ในการออกแบบ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับคุณสมบัติของวัสดุที่ใช้จริง อย่างไรก็ตาม ในทางทฤษฎีมีความเป็นไปได้ที่จะพัฒนาวิธีการออกแบบการเรียงเส้นใยเพื่อควบคุมให้การกระจายความเค้นในเส้นใยสม่ำเสมอขึ้น หรือให้ความเค้นมีค่าตามที่ต้องการได้โดยการเปลี่ยนแปลงความหนาแน่นของเส้นใยให้สัมพันธ์กับความเค้นในบริเวณต่างๆบนวัตถุ ซึ่งเป็นประเด็นที่ต้องศึกษาต่อไป นอกจากนี้การพัฒนางานวิจัยในอนาคตยังรวมถึงการใช้สมการทำนายคุณสมบัติของวัสดุเชิงประกอบที่แม่นยำขึ้น ประกอบกับการใช้ค่าคุณสมบัติจริงของวัสดุร่วมกับทฤษฎีความเสียหายที่เหมาะสม และ พิจารณาความเป็นไปได้ของกระบวนการผลิต เพื่อนำไปสู่การออกแบบชิ้นส่วนที่สามารถสร้างได้จริงเพื่อนำมาทดสอบต่อไป

7. กิตติกรรมประกาศ

ผลงานนี้ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยจากคณะกรรมการส่งเสริมการวิจัยเสริมหลักสูตร มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ปี พ.ศ. 2546

8. บรรณานุกรม

- [1] Wulpi, D. Understanding how components fail, 2nd edition, ASM International, 1999.
- [2] Guo, E. เอกสารประกอบการสอนวิชา Introduction to Biomechanics, Columbia University, 1998.
- [3] Cholaseuk D., Srinivasan V. and Modi, V., Robustness in optimum design of freeform mechanical parts, Proceedings of DETC'00 ASME 2000 Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, Baltimore, Maryland, September, pp.10-13, 2000.
- [4] Bendsoe, M. P. Optimal shape design as a material distribution problem, Structural optimization, No. 1, pp. 193-202., 1989.
- [5] Gliesche, K., Hubner, T. and Orawetz, H. Application of the tailored fibre placement (TFP) process for a local reinforcement on an "open-hole" tension plate from carbon/epoxy laminates, Composites Science and Technology, Volume 63, Issue 1, pp. 81-88., January 2003.
- [6] Pedersen P, Rozvany G., editor. Optimal orientation of anisotropic materials, optimal distribution of anisotropic materials, optimal design for a class of non-linear elasticity, optimisation of large structural systems, vol. 2, pp. 649-681., 1993.
- [7] Rothe H. On a novel reinforcement corresponding to stress lines. ICCM-9, vol. IV, Madrid, pp. 635-639., 1993.
- [8] Tosh M., Kelly D. An experimental test program investigation optimal fibre placement for carbon fibre composite laminates. Australasian Congress on Applied Mechanics, Canberra, Australia, February 1999.
- [9] Daniel, I. and Ishai, O. Engineering Mechanics of Composite Materials, Oxford University Press, 1994.
- [10] Halpin, J. and Tsi, S., Effects of Environmental Factors on Composite Materials, Airforce Technical Report AFML-TR-67-423, Wright Aeronautical Labs, Dayton OH, 1967.
- [11] Betti, R., เอกสารประกอบการสอนวิชา Finite Element Analysis I, Columbia University, 1997.