

# ความสวยงามวางนัยทั่วไป : ผลคูณของ 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกัน เพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยพหุคูณของ 3

## Generalized Beauty: The Product of 9 and the Arranged Number by Increasing to the Left by Multiple of 3

วนิดา ราตรีเสนห์ และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์\*

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยพะเยา อำเภอเมือง จังหวัดพะเยา 56000

Wanida Ratreesane and Aiyared Iampan\*

Department of Mathematics, School of Science, University of Phayao, Mueang, Phayao 56000

### บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการศึกษาและการหารูปทั่วไปของผลคูณ 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยพหุคูณของ 3 ผลการศึกษาพบรูปทั่วไปของผลคูณดังกล่าว ดังนี้  $(3 \times n) \dots 963 \times 9 = ((3 \times n) - 1) \underbrace{666 \dots 6}_7 \#(6) = n - 1$

สำหรับทุก  $n \in \mathbb{N}$

คำสำคัญ : ผลคูณและจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยพหุคูณของ 3

### Abstract

This article presents a study and finding a general form of the product of 9 and the arranged number by increasing to the left by multiple of 3. The results show that the general form of the product is  $(3 \times n) \dots 963 \times 9 = ((3 \times n) - 1) \underbrace{666 \dots 6}_7$  for all  $n \in \mathbb{N}$   
 $\#(6) = n - 1$

**Keywords:** product and arranged number by increasing to the left by multiple of 3

### 1. บทนำ

การคำนวณหาผลลัพธ์ของการคูณของจำนวนที่มีหลายหลักนั้น (ในบทความนี้ จะใช้สัญลักษณ์การคูณด้วย  $\cdot$  หรือ  $\times$ ) ถึงแม้ว่าจะเข้าใจในวิธีการที่ไม่ยากนัก แต่กลับเป็นเรื่องที่ยากอย่างมากในการคำนวณ ฉะนั้นหากสามารถหาเครื่องมือที่เหมาะสม

สำหรับการคำนวณที่ยากบางอย่างได้ก็จะเป็นเรื่องที่เพิ่มความสะดวกและความสนุกสนานในการคิดคำนวณและการเรียนรู้มากยิ่งขึ้น ด้วยเหตุนี้จึงเกิดการศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณในลักษณะต่าง ๆ ที่น่าสนใจ ดังนี้ อัยเรศ [8] ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลการยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข

1 โดยได้พบว่าผลการยกกำลังสองนี้สามารถเขียนอยู่ในรูปทั่วไปได้และมีลักษณะที่สวยงาม ดังนี้ กำหนดให้  $n$  เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่  $n = q^r$  เมื่อ  $q$  และ  $r$  เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง  $0 \leq r < 10$  จะได้ว่า

$$\left( \frac{111...1}{\#(1)=n} \right)^2 = 123...9101...q(r-1)qrq(r-1)...1109...321$$

อภิสิทธิ์ และอัยเรศ [7] ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณของจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจากเลข 1 ไปทางซ้ายกับเลข 9 โดยได้พบว่าผลการยกกำลังสองนี้สามารถเขียนอยู่ในรูปทั่วไปได้ ดังนี้ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก  $n$  โดยที่  $n = q^r$  เมื่อ  $q$  และ  $r$  เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง  $0 \leq r < 10$  จะได้ว่า

$$(q^r q(r-1) \dots 1109 \dots 321) \times 9 = \begin{cases} q(r-1) \ 888 \dots 8 \ 9, 1 \leq r < 10 \\ \#(8)=q(r-1) \\ q^{-1} 9 \ 888 \dots 8 \ 9, r=0 \\ \#(8)=q^{-1} 9 \end{cases}$$

ณัฐพงษ์ และอัยเรศ [1] ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลการยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 3 (เลข 6) ยกเว้นหลักหน่วยเป็นเลข 4 (เลข 7) โดยได้พบว่าผลการยกกำลังสองนี้สามารถเขียนอยู่ในรูปทั่วไปได้ ดังนี้ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก  $n$  จะได้

$$\left( \frac{333...34}{\#(3)=n} \right)^2 = \frac{111...1555...56}{\#(1)=n+1 \quad \#(5)=n}$$

$$\text{และ} \left( \frac{666...67}{\#(6)=n} \right)^2 = \frac{444...4888...89}{\#(4)=n+1 \quad \#(8)=n}$$

แสงประทีป และอัยเรศ [5] ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลบวกของผลการยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 6 (เลข 3, 9) กับจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 6 (เลข 3, 9) โดยได้พบว่าผลบวกของผลการยกกำลังสองนี้สามารถเขียนอยู่ในรูปทั่วไปได้ ดังนี้ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก  $n$  จะได้ว่า

$$\left( \frac{666...6}{\#(6)=n} \right)^2 + \frac{666...6}{\#(6)=n} = \frac{444...4}{\#(4)=n} \frac{222...2}{\#(2)=n}$$

$$\left( \frac{333...3}{\#(3)=n} \right)^2 + \frac{333...3}{\#(3)=n} = \frac{111...1}{\#(1)=n} \frac{222...2}{\#(2)=n}$$

$$\text{และ} \left( \frac{999...9}{\#(9)=n} \right)^2 + \frac{999...9}{\#(9)=n} = \frac{999...9}{\#(9)=n} \frac{000...0}{\#(0)=n}$$

ดราวรรณ และอัยเรศ [3] ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณของจำนวน 143 กับจำนวนเต็มบวกที่หารลงตัวด้วยจำนวนที่ทุกหลักเป็น 7 ซึ่งพบว่ากำหนดให้  $m$  เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง  $m \geq 3$  และสำหรับทุกจำนวนเต็มบวก  $n$  จะได้ว่า

$$143 \times \frac{777...7}{\#(7)=m} \times n = \underbrace{nnn(2 \cdot n)(2 \cdot n)(2 \cdot n) \dots (2 \cdot n)nnn}_{\#(2 \cdot n)=m-3}$$

รัตติญา และอัยเรศ [4] ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณของจำนวน 12345679 กับจำนวนเต็มบวกที่เลข 9 หารลงตัว ซึ่งพบว่า ถ้า  $n = q^r$  แล้ว  $12345679 \cdot 9 \cdot n = \frac{q^r q^r q^r \dots q^r}{\#(q^r)=9}$

ด้วยเหตุนี้ เราจึงจะศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณของ 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยพหุคูณของ 3 ที่เราสังเกตเห็นความสัมพันธ์ที่น่าสนใจบางอย่าง ซึ่งจะกล่าวถึงข้อสังเกตในหัวข้อต่อไป และหากเราสามารถหารูปทั่วไปสำหรับการคำนวณหาผลคูณของ 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยพหุคูณของ 3 ได้ ก็จะเป็นการเพิ่มความสะดวกให้มากขึ้นสำหรับการคำนวณหาผลคูณนั้นนั่นเอง

บทความนี้จึงมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณของ 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยพหุคูณของ 3 โดยเครื่องมือหลักที่เราใช้ในการสร้างจำนวนเศษเหลือและการพิสูจน์ คือ ขั้นตอนวิธีการหารและหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งกล่าวไว้ดังนี้

**ทฤษฎีบท 1** ขั้นตอนวิธีการหาร (The Division Algorithm) [9] ถ้า  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวน

เต็ม โดยที่  $b \neq 0$  แล้วมีจำนวนเต็ม  $q$  และ  $r$  เพียงชุดเดียวเท่านั้น ซึ่ง  $a = b \cdot q + r$  และ  $0 \leq r < |b|$

**ทฤษฎีบท 2 หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์**  
(The Principle of Mathematical Induction) [9]  
กำหนดให้  $P(n)$  แทนข้อความเกี่ยวกับจำนวนเต็มบวก  $n$  และกำหนดให้  $n_0$  เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งสอดคล้องกับข้อความต่อไปนี้ (1)  $P(n_0)$  เป็นจริง (2) ถ้า  $P(k)$  เป็นจริง สำหรับจำนวนเต็มบวก  $k \geq n_0$  แล้ว  $P(k+1)$  เป็นจริง สรุปได้ว่า  $P(n)$  เป็นจริง

$$\begin{array}{cccccc} 0 = {}_00 & 10 = {}_10 & 30 = {}_30 & 50 = {}_50 & 100 = {}_{10}0 & 130 = {}_{13}0 \\ 1 = {}_01 & 11 = {}_11 & 31 = {}_31 & 51 = {}_51 & 101 = {}_{10}1 & 131 = {}_{13}1 \\ 2 = {}_02 & 12 = {}_12 & 32 = {}_32 & 52 = {}_52 & 102 = {}_{10}2 & 132 = {}_{13}2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 9 = {}_09 & 19 = {}_19 & 39 = {}_39 & 59 = {}_59 & 109 = {}_{10}9 & 139 = {}_{13}9 \end{array}$$

และ

$$\begin{array}{cccccc} 0 = {}_00 & -10 = {}_{-1}0 & -30 = {}_{-3}0 & -50 = {}_{-5}0 & -100 = {}_{-10}0 & -130 = {}_{-13}0 \\ -1 = {}_{-1}9 & -11 = {}_{-2}9 & -31 = {}_{-4}9 & -51 = {}_{-6}9 & -101 = {}_{-11}9 & -131 = {}_{-14}9 \\ -2 = {}_{-1}8 & -12 = {}_{-2}8 & -32 = {}_{-4}8 & -52 = {}_{-6}8 & -102 = {}_{-11}8 & -132 = {}_{-14}8 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -9 = {}_{-1}1 & -19 = {}_{-2}1 & -39 = {}_{-4}1 & -59 = {}_{-6}1 & -109 = {}_{-11}1 & -139 = {}_{-14}1 \end{array}$$

**บทนิยาม 1** [2] กำหนดให้  ${}_Z\mathcal{R}$  แทนเซตของจำนวนใน (I) ทั้งหมด นั่นคือ  ${}_Z\mathcal{R} = \{qr \mid r, q \in \mathbb{Z} \text{ และ } 0 \leq r < 10\}$  (II) และเราจะเรียกสมาชิกของ  ${}_Z\mathcal{R}$  ว่าจำนวนเศษเหลือ (remainder number)

จากการแปลงเลขฐานสิบใน (I) นั้น จะเห็นว่าเลขที่ถูกแปลงขึ้นมาไม่ใช่เลขฐานสิบปกติ ฉะนั้นก่อนที่จะกล่าวถึงทฤษฎีบทที่สำคัญและนำทฤษฎีบทไปประยุกต์ใช้ เพื่อให้เข้าใจผลลัพธ์ได้ง่ายจะยกตัวอย่างการแปลงจำนวนจาก (I) กลับไปเป็นเลขฐานสิบที่ทุกคนคุ้นเคย

จากอภิสิทธิ์ และ อัยเรศ [6] จะได้ว่าการแปลงจำนวนที่ได้จากการเรียงกันของจำนวนเศษเหลือเป็นเลขฐานสิบ ทำได้ดังนี้

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก  $n \geq n_0$

จากขั้นตอนวิธีการหาร อัยเรศ [8] และ ญรัฐพิและอัยเรศ [2] ได้นิยามจำนวนเศษเหลือ (remainder number) ไว้ดังนี้ กำหนดให้  $a$  เป็นจำนวนเต็มใด ๆ และ  $b = 10$  จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม  $q$  (ผลหาร) และ  $r$  (เศษเหลือ) ซึ่ง  $a = 10 \cdot q + r$  และ  $0 \leq r < 10$  ฉะนั้น  $r$  เป็นเลขโดดนั่นเอง นิยาม  $a := {}_qr$  (I) และเรียก  ${}_qr$  ว่าจำนวนเศษเหลือสำหรับ  $a$  เช่น

$$\begin{aligned} & q_n r_n q_{n-1} r_{n-1} \cdots q_3 r_3 q_2 r_2 q_1 r_1 = \\ & q_n(r_n + q_{n-1}) \cdots (r_3 + q_2)(r_2 + q_1)r_1 \text{ สำหรับทุก} \\ & \text{จำนวนเต็มบวก } n \text{ เช่น การแปลง } {}_53_{12}{}_{17}{}_{230}{}_{65}{}_{4509} \\ & \text{ที่ได้จากการเรียงกันของจำนวนเศษเหลือกลับเป็น} \\ & \text{เลขฐานสิบ ดังนี้} \\ & {}_53_{12}{}_{17}{}_{230}{}_{65}{}_{4509} = 5(3+12)1(7+230)(6+5)(4+4)509 \\ & = 5(15)1(237)(11)(8)509 \\ & = {}_551_{23}{}_{718}509 \\ & = (5+1)5(1+23)(7+1)18509 \\ & = 65(24)(8)18509 \\ & = 65_24818509 \\ & = 6(5+2)4818509 \\ & = 674818509 \end{aligned}$$

การศึกษาและการประยุกต์ของจำนวนเศษเหลือดูได้จาก [1-7] และเพื่อความสะดวกต่อการ

พิสูจน์ เราจะใช้สัญลักษณ์  $\#(m)$  แทนจำนวนของ  $m$  ที่เรียงติดกัน สำหรับทุกจำนวนเต็ม  $m$  เช่น  
17 66666 7 เป็นต้น  
 $\#(6)=5$

## 2. ผลการศึกษาหลัก

จากการสังเกตผลคูณของ 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยพหุคูณของ 3 ทำให้เราพบความสัมพันธ์ที่น่าสนใจ ดังนี้

$$\begin{array}{llll}
 (3 \cdot 1) \times 9 & = & 3 \times 9 & = & 27 & : \#(6) = 0 \\
 (3 \cdot 2) 3 \times 9 & = & 63 \times 9 & = & 567 & : \#(6) = 1 \\
 (3 \cdot 3) 63 \times 9 & = & 963 \times 9 & = & 8667 & : \#(6) = 2 \\
 (3 \cdot 4) 963 \times 9 & = & 12963 \times 9 & = & 116667 & : \#(6) = 3 \\
 (3 \cdot 5) (12) 963 \times 9 & = & 162963 \times 9 & = & 1466667 & : \#(6) = 4 \\
 (3 \cdot 6) (15) (12) 963 \times 9 & = & 1962963 \times 9 & = & 17666667 & : \#(6) = 5 \\
 (3 \cdot 7) (18) (15) (12) 963 \times 9 & = & 22962963 \times 9 & = & 206666667 & : \#(6) = 6 \\
 (3 \cdot 8) (21) (18) (15) (12) 963 \times 9 & = & 262962963 \times 9 & = & 2366666667 & : \#(6) = 7 \\
 (3 \cdot 9) (24) (21) (18) (15) (12) 963 \times 9 & = & 2962962963 \times 9 & = & 26666666667 & : \#(6) = 8 \\
 (3 \cdot 10) (27) (24) (21) (18) (15) (12) 963 \times 9 & = & 32962962963 \times 9 & = & 296666666667 & : \#(6) = 9
 \end{array} \quad (III)$$

จากผลคูณใน (III) จะสังเกตเห็นว่าจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยพหุคูณของ 3 มีรูปทั่วไป ดังนี้  $(3 \cdot n)(3 \cdot (n-1)) \dots 963$  สำหรับจำนวนเต็มบวก  $1 \leq n \leq 10$  โดยที่จำนวนเต็ม  $n$  และผลคูณ  $3 \cdot n$  มีผลต่อผลคูณของ 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยพหุคูณของ 3 ซึ่งผลคูณเป็นจำนวนเต็ม ที่เลขหลักหน่วยเป็น 7 เลขหลักที่สองจนถึงหลักที่  $n$  เป็น 6 ทั้งหมด และเลขหลักสุดท้ายเป็นจำนวนเศษเหลือของ  $(3 \cdot n) - 1$  ฉะนั้นสรุปเป็นรูปทั่วไปสำหรับ (III) ได้ดังนี้  $(3 \cdot n)(3 \cdot (n-1)) \dots 963 \times 9$

$$= ((3 \cdot n) - 1) \underbrace{666 \dots 6}_7 \text{ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก } \#(6)=n-1$$

$$n \leq 10$$

ตัวอย่าง 1 จะแสดงให้เห็นว่าผลคูณที่หาได้สอดคล้องกับข้อสังเกตของเรา เมื่อ  $n=12$  ซึ่งจะนำเราไปสู่การศึกษาของบทความนี้

ตัวอย่าง 1 ผลคูณ  $3962962962963 \times 9$  สามารถหาผลลัพธ์ได้ถูกต้องจากข้อสังเกตที่เราพบ โดยประยุกต์ใช้จำนวนเศษเหลือ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 3962962962963 \times 9 &= {}_3 6, {}_3 3, {}_0 2, {}_7 4, {}_2 1, {}_8 5, {}_1 2963 \times 9 \\
 &= (3 \cdot 12)(33)(30)(27)(24)(21)(18)(15)(12)963 \times 9 \\
 &= (36-1) \underbrace{666666666667}_{\#(6)=12-1=11} \\
 &= 35 \underbrace{666666666667}_{\#(6)=11}
 \end{aligned}$$

ด้วยเหตุนี้เราจึงตั้งข้อสงสัยดังต่อไปนี้

(1) เราสามารถเขียนรูปทั่วไปของผลคูณของ 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยพหุคูณของ 3 ได้หรือไม่

(2) ถ้าเราสามารถเขียนรูปทั่วไปของผลคูณนี้ได้

แล้วผลคูณจะมีรูปทั่วไปสอดคล้องกับข้อสังเกตที่เราพบหรือไม่

ต่อไปเป็นบทตั้งที่สำคัญสำหรับการพิสูจน์ทฤษฎีบทหลัก ดังนี้

**บทตั้ง 1** สำหรับทุก  $n \in \mathbb{N}$  จะได้ว่า

$$(3 \cdot n)0 = 30 \cdot n$$

**การพิสูจน์** กำหนดให้  $P(n)$  แทนข้อความ

$$(3 \cdot n)0 = 30 \cdot n \text{ สำหรับทุก } n \in \mathbb{N}$$

เนื่องจาก  $(3 \cdot 1)0 = 30 = 30 \cdot 1$  จะได้ว่า

$P(1)$  เป็นจริง กำหนดให้  $k$  เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง

$P(k)$  เป็นจริง จะได้ว่า  $(3 \cdot k)0 = 30 \cdot k$  พิจารณา

$$\begin{aligned} [3 \cdot (k+1)]0 &= (3 \cdot k + 3)0 \\ &= (3 \cdot k + 3)(0 + 0) \\ &= (3 \cdot k)0 + 30 \\ &= 30 \cdot k + 30 \quad (\text{โดยสมมุติฐาน}) \\ &= 30 \cdot (k+1) \end{aligned}$$

ฉะนั้น  $P(k+1)$  เป็นจริง โดยหลักการอุปนัย

เชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า  $(3 \cdot n)0 = 30 \cdot n$  สำหรับทุก  $n \in \mathbb{N}$  □

ต่อไปเป็นผลการศึกษาหลักของบทความนี้ ซึ่ง

จะตอบข้อสงสัยทั้งสองข้อข้างต้นของเราได้

**ทฤษฎีบท 3** สำหรับทุก  $n \in \mathbb{N}$  จะได้ว่า

$$(3 \cdot n) \dots 963 \times 9 = ((3 \cdot n) - 1) \underbrace{666 \dots 6}_7 \quad (\text{IV})$$

$\#(6)=n-1$

**การพิสูจน์** กำหนดให้  $P(n)$  แทนข้อความ

$$(3 \cdot n) \dots 963 \times 9 = ((3 \cdot n) - 1) \underbrace{666 \dots 6}_7 \text{ สำหรับ } \#(6)=n-1$$

ทุก  $n \in \mathbb{N}$

$$\text{เนื่องจาก } (3 \cdot 1) \times 9 = 27 = ((3 \cdot 1) - 1) \underbrace{666 \dots 6}_7$$

$\#(6)=1-1=0$

จะได้ว่า  $P(1)$  เป็นจริง กำหนดให้  $k$  เป็นจำนวน

เต็มบวก ซึ่ง  $P(k)$  เป็นจริง จะได้ว่า

$$(3 \cdot k) \dots 963 \times 9 = ((3 \cdot k) - 1) \underbrace{666 \dots 6}_7 \text{ พิจารณา } \#(6)=k-1$$

$$\begin{aligned} [3 \cdot (k+1)] \dots 963 \times 9 &= [3 \cdot (k+1)](3k) \dots 963 \times 9 \\ &= \{[3 \cdot (k+1)] \underbrace{000 \dots 0}_{\#(0)=k} + (3 \cdot k) \dots 963\} \times 9 \\ &= \{[3 \cdot (k+1)] \underbrace{000 \dots 0}_{\#(0)=k} \times 9 + [(3 \cdot k) \dots 963 \times 9]\} \\ &= \{[3 \cdot (k+1)] \underbrace{000 \dots 0}_{\#(0)=k} \times 9 + ((3 \cdot k) - 1) \underbrace{666 \dots 6}_7\} \\ &= \{[27 \cdot (k+1)] \underbrace{000 \dots 0}_{\#(0)=k} + ((3 \cdot k) - 1) \underbrace{666 \dots 6}_7\} \\ &= ((27 \cdot k) + 27 + (3 \cdot k) - 1) \underbrace{666 \dots 6}_7 \\ &= ((30 \cdot k) + 26) \underbrace{666 \dots 6}_7 \\ &= ((3 \cdot k)0 + 26) \underbrace{666 \dots 6}_7 \quad (\text{โดยบทตั้ง 1}) \\ &= [(3 \cdot k)0] \underbrace{000 \dots 0}_{\#(0)=k} + 26 \underbrace{666 \dots 6}_7 \\ &= (3 \cdot k) \underbrace{000 \dots 0}_{\#(0)=k+1} + 2 \underbrace{666 \dots 6}_7 \\ &= ((3 \cdot k) + 2) \underbrace{666 \dots 6}_7 \\ &= [3 \cdot (k+1) - 1] \underbrace{666 \dots 6}_7 \\ &= [3 \cdot (k+1) - 1] \underbrace{666 \dots 6}_7 \end{aligned}$$

$\#(6)=(k+1)-1$

ฉะนั้น  $P(k+1)$  เป็นจริง โดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า  $(3 \cdot n) \dots 963 \times 9 = ((3 \cdot n) - 1) \underbrace{666 \dots 6}_7$

$\#(6)=n-1$

สำหรับทุก  $n \in \mathbb{N}$  □

ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงถึงการหาผลคูณของ 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยพหุคูณของ 3 โดยประยุกต์ใช้ทฤษฎีบท 3

$$\begin{aligned}
 162963 \times 9 &= (15)(12)963 \times 9 \\
 &= (3 \cdot 5)(3 \cdot 4)(3 \cdot 3)(3 \cdot 2)(3 \cdot 1) \times 9 \\
 &= (15-1) \underbrace{666 \dots 6}_7 \\
 &\quad \#(6)=5-1=4 \\
 &= 14 \underbrace{6666}_7 \\
 &\quad \#(6)=4
 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2 จงหาผลลัพธ์ของ  $162963 \times 9$

วิธีทำ เนื่องจาก  $162963 = 15_1 2963 = (15)(12)963$  ดังนั้น  $162963 \times 9 = 14 \underbrace{6666}_7$   
และโดยทฤษฎีบท 3 จะได้ว่า  $\#(6)=4$

ตัวอย่าง 3 จงหาผลลัพธ์ของ  $462962962962963 \times 9$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\begin{aligned}
 462962962962963 \times 9 &= 4^2 3^9 3^6 3^3 0^2 7^2 4^2 1^8 5_1 2963 \times 9 \\
 &= (42)(39)(33)(30)(27)(24)(21)(18)(15)(12)963 \times 9
 \end{aligned}$$

และโดยทฤษฎีบท 3 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 462962962962963 \times 9 &= (42)(39)(33)(30)(27)(24)(21)(18)(15)(12)963 \times 9 \\
 &= (3 \cdot 14)(39)(33)(30)(27)(24)(21)(18)(15)(12)963 \times 9 \\
 &= (42-1) \underbrace{666 \dots 6}_7 \\
 &\quad \#(6)=14-1=13 \\
 &= 41 \underbrace{666666666666}_7 \\
 &\quad \#(6)=13
 \end{aligned}$$

ดังนั้น  $462962962962963 \times 9 = 41 \underbrace{666666666666}_7$   
 $\#(6)=13$

ตัวอย่าง 4 จงหาผลลัพธ์ของ  $13962962962962962962962962962963 \times 9$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\begin{aligned}
 13962962962962962962962962962963 \times 9 &= 12^6 12^3 12^0 \dots 1^8 5_1 2963 \times 9 \\
 &= (126)(123)(120) \dots (18)(15)(12)963 \times 9
 \end{aligned}$$

และโดยทฤษฎีบท 3 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 13962962962962962962962962962963 \times 9 &= (126)(123)(120) \dots (18)(15)(12)963 \times 9 \\
 &= (3 \cdot 42)(123)(120) \dots (18)(15)(12)963 \times 9 \\
 &= (126-1) \underbrace{666 \dots 6}_7 \\
 &\quad \#(6)=42-1=41 \\
 &= 125 \underbrace{666 \dots 6}_7 \\
 &\quad \#(6)=41
 \end{aligned}$$

ดังนั้น  $13962962962962962962962962962963 \times 9 = 125 \underbrace{666 \dots 6}_7$   
 $\#(6)=41$

### 3. บทสรุป

จากการศึกษาผลคูณของ 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยพหุคูณของ 3 โดยอาศัยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์และจำนวนเศษเหลือเป็นเครื่องมือสำคัญในการพิสูจน์ ทำให้ตอบข้อสงสัยข้างต้นทั้งสองข้อของเราได้ ดังนี้

(1) เราสามารถเขียนรูปทั่วไปของผลคูณของ 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยพหุคูณของ 3 ได้ ดังได้กล่าวไว้ในทฤษฎีบท 3 ดังนี้

$$(3 \cdot n) \dots 963 \times 9 = ((3 \cdot n) - 1) \underbrace{666 \dots 6}_{\#(6)=n-1} \text{ สำหรับจำนวนเต็มบวก } n$$

(2) รูปทั่วไปที่ได้ตามทฤษฎีบท 3 นั้น สอดคล้องกับข้อสังเกตที่เราพบข้างต้น จากการสังเกตผลคูณที่สวยงามของ 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยพหุคูณของ 3 จนกระทั่งสามารถหาและพิสูจน์รูปทั่วไปได้ ซึ่งนับได้ว่ารูปทั่วไปนี้เป็นการวางนัยทั่วไป (generalization) ของการสังเกตของเรา และกล่าวเช่นเดียวกับ [8] ได้ว่ารูปทั่วไปของผลคูณของ 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยพหุคูณของ 3 เป็นอีก ความสวยงามวางนัยทั่วไป (generalized beauty) ในแบบคณิตศาสตร์อีกรูปแบบหนึ่ง ยิ่งไปกว่านั้นรูปทั่วไปนี้ยังช่วยให้การคำนวณหาผลคูณของ 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยพหุคูณของ 3 เป็นเรื่องที่สะดวกและไม่ยุ่งยากเกินไป

### 4. กิตติกรรมประกาศ

บทความนี้ได้รับการสนับสนุนจากกลุ่มวิจัย : Group for Young Algebraists in University of Phayao (GYA) ผู้เขียนขอขอบพระคุณผู้ประเมินบทความวิชาการทุกท่านสำหรับข้อคิดเห็นและข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์อย่างมากในการปรับปรุงบทความให้สำเร็จลุล่วงได้อย่างสมบูรณ์

### 5. รายการอ้างอิง

- [1] ณัฐพงษ์ พรหมวงษ์ และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2555, ความสวยงามวางนัยทั่วไป : ผลการยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 3 (เลข 6) ยกเว้นหลักหน่วยเป็นเลข 4 (เลข 7), ว.วิชาการ มหาวิทยาลัยราชภัฏกาญจนบุรี 1(1): 41-49.
- [2] ณัฐวุฒิ พลอาสา และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2556, ความสวยงามวางนัยทั่วไป : การเริ่มต้นของกลุ่มของจำนวนเศษเหลือ, ว.นเรศวรพะเยา 6(1): 25-30.
- [3] ดารารวรรณ ดันเมฆ และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2555, ความสวยงามวางนัยทั่วไป : ผลคูณของจำนวน 143 กับจำนวนเต็มบวกที่หารลงตัวด้วยจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 7, ว.วิทยาศาสตร์ มศว. 28(2): 185-198.
- [4] รัตติญา บุญเรือง และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2556, ความสวยงามวางนัยทั่วไป : ผลคูณของจำนวน 12345679 กับจำนวนเต็มบวกที่เลข 9 หารลงตัว, ว.นเรศวรพะเยา 5(3): 327-332.
- [5] แสงประทีป นนกระโทก และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2555, ความสวยงามวางนัยทั่วไป : ผลบวกของผลการยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 6 กับจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 6, ว.วิทยาศาสตร์ แห่งมหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบุรี 9(1): 80-90.
- [6] อภิสิทธิ์ เมืองมา และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2556, ความสวยงามวางนัยทั่วไป : การนิยามจำนวนหลายหลักที่แต่ละหลักเป็นจำนวนเต็ม, ว.วิชาการ มหาวิทยาลัยราชภัฏอุตรดิตถ์ 8(2): 48-58.
- [7] อภิสิทธิ์ เมืองมา และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2556, ความสวยงามวางนัยทั่วไป : ผลคูณของจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจากเลข 1 ไปทางซ้ายกับเลข 9, ว.วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี 15(1): 75-83.

- 
- [8] อัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2554, ความสวยงามวางนัยทั่วไป : การยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1. ว.นเรศวรพะเยา 4(2): 29-35.
- [9] Clark, W.E., 2002, Elementary Number Theory, Department of Mathematics, University of South Florida, Florida.