

การเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับพารามิเตอร์ขนาด ของการแจกแจงไวบูลล์แบบสองพารามิเตอร์

A Comparison of Intervals Estimation Methods for Scale Parameter of the Two-Parameter Weibull Distribution

ศรสวรรค์ บุญเพ็ญ*, บุญอ้อม โฉมที และอภิญญา หิรัญวงษ์

ภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

แขวงลาดยาว เขตจตุจักร กรุงเทพมหานคร 10900

Sornsawan Boonpen*, Boonorm Chomtee and Apinya Hirunwong

Department of Statistics, Faculty of Science, Kasetsart University,

Ladyao, Chatuchak, Bangkok 10900

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาและเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับพารามิเตอร์ขนาด (η) ของการแจกแจงไวบูลล์แบบสองพารามิเตอร์ เมื่อทราบค่าพารามิเตอร์ (β) ด้วยวิธีการประมาณ 2 วิธี คือ วิธีบูตสเตรปทีและวิธีแจ๊คไนฟ์ โดยพิจารณาค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นและค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น เป็นเกณฑ์ในการเปรียบเทียบ วิธีที่ดีกว่าเป็นวิธีที่มีค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดและมีค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำที่สุด กำหนดให้ข้อมูลมีขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 10, 20, 30, 50 และ 100 ค่าพารามิเตอร์ (β) มีค่า 1, 2, 3, 4, 5 และ 6 และพารามิเตอร์ (η) มีค่า 1, 1.5, 2, 2.5 และ 3 โดยจำนวนครั้งที่สุ่มซ้ำด้วยวิธีบูตสเตรปที เท่ากับ 1,000 ครั้ง และกำหนดสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ 95 % ทำการจำลองข้อมูลโดยใช้เทคนิคมอนติคาร์โล ด้วยโปรแกรม SAS ทำการทดลองซ้ำ 1,000 ครั้งในแต่ละสถานการณ์ที่ศึกษา จากการศึกษาพบว่าวิธีบูตสเตรปทีเป็นวิธีที่ดีที่สุดสำหรับทุกสถานการณ์ที่กำหนด โดยเฉพาะในกรณีที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50 และ 100 และค่าพารามิเตอร์ η ที่มีขนาดเล็ก ($\eta=1$) กับค่าพารามิเตอร์ β ที่มีขนาดใหญ่ ($\beta=6$)

คำสำคัญ : การแจกแจงไวบูลล์; วิธีบูตสเตรปที; วิธีแจ๊คไนฟ์; สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น; ความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น

Abstract

The objective of this research is to study and compare interval estimation methods: Bootstrap-t method and jackknife method, for the scale parameter of the two-parameter Weibull

distribution assumed that the beta parameter(β) is known. The criteria comparison are confidence coefficient which is not lower than the given confidence coefficient and the smallest average length of confidence interval. The scopes of this research are consisted of the sample sizes(n): 10, 20, 30, 50 and 100, the beta parameter(β): 1, 2, 3, 4, 5 and 6, and the scale parameter(η): 1, 1.5, 2, 2.5 and 3. The number of Bootstrap resampling equals to 1,000 times. Data is simulated 1,000 times for each situation by Monte Carlo Technique using the SAS software. The results of this research are as follows: Bootstrap-t method is the best method for every situations, especially when sample sizes are 50 and 100 and the scale parameter(η) is small ($\eta=1$) with a large beta parameter ($\beta = 6$).

Keywords: Weibull distribution; Bootstrap-t method; Jackknife method; confidence coefficient; average length of confidence interval

1. บทนำ

การประมาณค่าพารามิเตอร์เป็นการอนุมานทางสถิติประเภทหนึ่ง ซึ่งถูกนำมาใช้ประโยชน์ในการศึกษาและงานวิจัยในหลาย ๆ ด้าน โดยที่การประมาณค่าพารามิเตอร์แบ่งออกเป็น 2 ประเภท คือ การประมาณค่าแบบจุด (point estimation) ซึ่งเป็นการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่สนใจด้วยค่าสถิติเพียงค่าเดียวและการประมาณค่าแบบช่วง (interval estimation) เป็นการประมาณค่าพารามิเตอร์ว่าจะอยู่ช่วงใดช่วงหนึ่งหรือมีค่าอยู่ระหว่างค่า 2 ค่า ด้วยช่วงความเชื่อมั่นที่กำหนด นั่นคือ $L < \theta < U$ โดยที่ L และ U คือขอบเขตล่างและขอบเขตบนของช่วงความเชื่อมั่น ตามลำดับ ในการศึกษาการประมาณค่าแบบช่วงจะมีการแจกแจงทางสถิติเข้ามาเกี่ยวข้อง โดยเฉพาะการศึกษาการแจกแจงที่เกี่ยวข้องกับเวลาหรืออายุการใช้งาน เช่น การแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียล ศึกษาถึงเวลาที่รอคอยจนกระทั่งเกิดเหตุการณ์ที่สนใจ ศึกษาครั้งแรก และการแจกแจงไวบูลล์ศึกษาเกี่ยวกับอายุการใช้งานของวัตถุสิ่งของโดยวัดเวลาตั้งแต่เริ่มต้นจนกระทั่งวัตถุนั้นเสีย เสื่อมสภาพ หรือเริ่มนับเมื่อปรากฏการณ์ทำนองเดียวกันได้เกิดขึ้นเสร็จสิ้นไปแล้ว

ในเวลาดังกล่าว โดยจะนับติดต่อกันไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งปรากฏการณ์ที่รอคอยนั้นจะเกิดขึ้นอีก ซึ่งในบางครั้งการศึกษาเกี่ยวกับความคงทนถาวรของวัตถุ เครื่องมือและอุปกรณ์ต่าง ๆ แม้ว่าการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียล หรือการแจกแจงแกมมา มีความเหมาะสมที่จะใช้ในการศึกษาตัวแปรสุ่มเหล่านี้ แต่ก็ไม่เหมาะสมที่จะใช้อธิบายด้วยการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียล เนื่องจากมีข้อจำกัดที่ว่าอัตราการชำรุดหรือการชำรุดมีค่าเท่ากับค่าคงที่ค่าหนึ่ง แต่ความเป็นจริงแล้วอัตราการชำรุดอาจมีค่าเพิ่มขึ้นหรือมีค่าลดลง ซึ่งในทางปฏิบัติจะพบว่าการชำรุดที่เกิดขึ้นจะเกิดขึ้นอย่างช้า ๆ โดยเฉพาะอุปกรณ์ที่ไม่เกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่หรือการสั่นสะเทือน ซึ่งจะแสดงอัตราความชำรุดเพิ่มขึ้น ขณะใช้งานไปนาน ๆ เนื่องจากการเสื่อมสภาพหรือสึกกร่อน ดังนั้นการแจกแจงที่อธิบายปรากฏการณ์ของตัวแปรสุ่มเหล่านี้ได้อย่างเหมาะสม คือ การแจกแจงไวบูลล์ [1]

ในงานวิจัยนี้สนใจศึกษาการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับพารามิเตอร์ขนาด (scale parameter) ของการแจกแจงไวบูลล์แบบสองพารามิเตอร์ เนื่องจากการแจกแจงไวบูลล์เป็นการแจกแจงที่ศึกษาถึงอายุการใช้งานซึ่งสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้หลาย ๆ ด้าน

ทั้งทางวิศวกรรมและอุตสาหกรรม โดยมีผู้ที่เสนอวิธีการประมาณค่าให้หลายวิธีทั้งทางพาราเมตริกและนอนพาราเมตริก มีทั้งเปรียบเทียบวิธีทางพาราเมตริกกับวิธีทางนอนพาราเมตริกหรือเปรียบเทียบวิธีทางนอนพาราเมตริกด้วยตนเอง เช่น กัญญพิชญา [2] ศึกษาเปรียบเทียบวิธีการประมาณการแจกแจงของข้อมูลสมมาตรและไม่สมมาตรด้วยวิธีแฉ็กไนฟ์กับวิธีบูตสเตรป โดยจะประมาณพารามิเตอร์ค่าเฉลี่ย ความแปรปรวน ความเบ้ และความโด่ง ทั้งการประมาณค่าแบบจุดและแบบช่วง สำหรับการแจกแจงปกติปลอมปน การแจกแจงเลขชี้กำลังและการแจกแจงแกมมา ในการประมาณค่าแบบช่วงใช้สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นเป็นเกณฑ์ในการเปรียบเทียบ Oyeyemi [3] ได้ศึกษาเปรียบเทียบวิธีบูตสเตรปและวิธีแฉ็กไนฟ์โดยวิธีการทั้งสองเป็นเทคนิคทางสถิตินอนพาราเมตริกซึ่งใช้ลดความเอนเอียงของตัวประมาณแบบจุดและสร้างช่วงความเชื่อมั่นสำหรับพารามิเตอร์ของประชากรโดยไม่มีข้อสมมติเกี่ยวกับการแจกแจงทางสถิติและสามารถนำไปประยุกต์ได้ในหลาย ๆ สถานการณ์ และ Dicio and Efron [4] ได้กล่าวถึงวิธีบูตสเตรปที่สำหรับการสร้างช่วงความเชื่อมั่น ซึ่งเป็นวิธีการสุ่มตัวอย่างซ้ำแบบคืนที่ (resampling with replacement) จากชุดข้อมูลเดิม เพื่อสร้างชุดข้อมูลใหม่แล้วนำไปประมาณค่าพารามิเตอร์ที่สนใจศึกษาโดยวิธีการดังกล่าว ถูกเสนอเป็นครั้งแรกโดย Efron [5] ในปี ค.ศ. 1979

ดังนั้นผู้วิจัยจึงสนใจศึกษาเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าแบบช่วง 2 วิธี คือ วิธีบูตสเตรปที่และวิธีแฉ็กไนฟ์ สำหรับพารามิเตอร์ขนาด (scale parameter) ของการแจกแจงไวบูลล์แบบสองพารามิเตอร์เมื่อกำหนดให้ทราบค่าพารามิเตอร์ ($\beta = \beta_0$) ซึ่งเป็นพารามิเตอร์รูปร่าง (shape

parameter) โดยพิจารณาจากค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นและค่าความกว้างเฉลี่ยเป็นเกณฑ์ในการเปรียบเทียบ

2. วัตถุประสงค์ในการวิจัย

เพื่อศึกษาและเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าแบบช่วง 2 วิธี คือ วิธีบูตสเตรปที่และวิธีแฉ็กไนฟ์สำหรับพารามิเตอร์ขนาดของการแจกแจงไวบูลล์แบบสองพารามิเตอร์

3. วิธีการวิจัย

3.1 ในงานวิจัยนี้ กำหนดสถานการณ์ที่ศึกษาดังนี้ กำหนดให้ข้อมูลมีการแจกแจงไวบูลล์แบบสองพารามิเตอร์กรณีทราบค่าพารามิเตอร์ β เมื่อ ($\beta = \beta_0$) ซึ่งมีฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น คือ

$$f(x) = \frac{\beta_0}{\eta} x^{\beta_0-1} \exp \left[-\left(\frac{x}{\eta} \right)^{\beta_0} \right] ; x \geq 0, \beta_0 >$$

$0, \eta > 0$ เมื่อ β_0 เป็นพารามิเตอร์รูปร่าง (shape parameter) และ η เป็นพารามิเตอร์ขนาด (scale parameter) โดยกำหนดขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 10, 20, 30, 50 และ 100 และกำหนดให้ทราบค่าพารามิเตอร์ ($\beta = \beta_0$) เท่ากับ 1, 2, 3, 4, 5 และ 6 และค่าพารามิเตอร์ขนาด (η) เท่ากับ 1, 1.5, 2, 2.5 และ 3 ในกรณีของวิธีบูตสเตรปที่กำหนดจำนวนครั้งของการทำซ้ำเท่ากับ 1,000 กำหนดสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นคือ 95 % ทำการจำลองข้อมูลที่มีการแจกแจงดังกล่าวตามสถานการณ์ที่กำหนดด้วยเทคนิคมอนติ-คาร์โลด้วยการทำซ้ำ (M) 1,000 ครั้ง สำหรับแต่ละสถานการณ์ โดยใช้โปรแกรมทางสถิติ SAS

3.2 นำตัวอย่างสุ่ม $X_1, X_2, \dots, X_n$ ที่จำลองได้มาคำนวณช่วงความเชื่อมั่นของวิธีบูตสเตรปที่และวิธีแฉ็กไนฟ์ ดังนี้

3.2.1 วิธีบูตสแตรป (Bootstrap-t method) มีขั้นตอนดังต่อไปนี้

(1) จากตัวอย่างสุ่ม $X_1, X_2, \dots, X_n$ ที่มีการแจกแจงไวบูลล์แบบสองพารามิเตอร์ ซึ่งมีค่าประมาณ คือ $\hat{\eta}$ และค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน คือ $SE(\hat{\eta})$

(2) ทำการสุ่มตัวอย่างซ้ำแบบคืนที่จำนวน n ตัว จะได้ตัวอย่างสุ่มชุดใหม่ คือ $X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*$ ซึ่งเรียกว่าตัวอย่างบูตสแตรป (Bootstrap sample)

(3) คำนวณค่าประมาณ $\hat{\eta}^*$ และค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน $SE^*(\hat{\eta}^*)$ ของตัวอย่างบูตสแตรป

(4) คำนวณค่าสถิติ T^* ได้จาก $T^* =$

$$\frac{\hat{\eta}^* - \hat{\eta}}{SE^*(\hat{\eta}^*)}$$

(5) ทำตามขั้นตอนที่ (2), (3) และ (4) ตามลำดับ ด้วยจำนวนครั้งของการทำซ้ำแบบบูตสแตรป (B) 1,000 ครั้ง จะได้ค่าสถิติ $T_1^*, T_2^*, \dots, T_{1,000}^*$

(6) นำค่า $T_1^*, T_2^*, \dots, T_{1,000}^*$ จำนวน 1,000 ค่า มาเรียงลำดับจากน้อยไปมาก เพื่อหาค่า $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ และ $t_{\frac{\alpha}{2}}$ โดยพิจารณาค่า $T_1^*, T_2^*, \dots, T_{1,000}^*$ ที่ได้เรียงลำดับแล้ว โดยที่ค่าในลำดับที่ $B \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ คือ

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}} \text{ และ } B \cdot \left(\frac{\alpha}{2}\right) \text{ คือ } t_{\frac{\alpha}{2}}$$

(7) นำค่าสถิติ $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ และ $t_{\frac{\alpha}{2}}$ จากขั้นตอนที่ (6) มาคำนวณช่วงความเชื่อมั่นสำหรับพารามิเตอร์ η เมื่อทราบค่าพารามิเตอร์ $\beta_0 = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ไม่ ตัด ง นี้

$$\left[\hat{\eta} - t_{1-\frac{\alpha}{2}} SE(\hat{\eta}), \hat{\eta} - t_{\frac{\alpha}{2}} SE(\hat{\eta}) \right]$$

3.2.2 วิธีแจ๊คไนฟ์ (Jackknife Method)

วิธีแจ๊คไนฟ์ถูกเสนอเป็นครั้งแรกโดย Quenouille [6] เพื่อลดความเอนเอียงของตัวประมาณค่าซึ่งเป็นวิธีที่ใช้การเลือกตัวอย่างซ้ำวิธีหนึ่ง โดยการเลือกตัวอย่างใหม่จากตัวอย่างเพียงชุดเดียว [3,7] มีขั้นตอนดังนี้

(1) จากตัวอย่างสุ่ม $X_1, X_2, \dots, X_n$ ที่มีการแจกแจงไวบูลล์แบบสองพารามิเตอร์จะสร้างตัวอย่างชุดใหม่ โดยการตัดค่าที่ i ออก 1 ค่า โดยที่ $i = 1, 2, \dots, n$ จะได้ตัวอย่างใหม่ คือ $X_1, X_2, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n$ ที่มีขนาด $n-1$ โดยค่าที่ถูกตัดออกจะใส่คืนกลับไปในตัวอย่งก่อนที่จะทำการสร้างตัวอย่างครั้งต่อไป ทำเช่นนี้ จำนวน n ครั้ง นั่นคือ ครั้งที่ 1 ตัดค่า X_1 ออกจากตัวอย่าง แล้วคำนวณค่าประมาณของ η จาก $X_2, X_3, \dots, X_n$ จะได้ค่าประมาณ คือ $\hat{\eta}_{(1)}$ ครั้งที่ 2 ตัดค่า X_2 ออกจากตัวอย่าง แล้วคำนวณค่าประมาณของ η จาก $X_1, X_3, \dots, X_n$ จะได้ค่าประมาณ คือ $\hat{\eta}_{(2)}$ สำหรับครั้งที่ 3, 4, ..., n ทำนองเดียวกันกับครั้งที่ 1 และ 2 จะได้ค่าประมาณ $\hat{\eta}_{(3)}, \hat{\eta}_{(4)}, \dots, \hat{\eta}_{(n)}$ ด้วยการซ้ำดังที่กล่าวมาแล้ว จำนวน n ครั้ง จะได้ค่าประมาณของ η จำนวน n ตัว คือ $\hat{\eta}_{(1)}, \hat{\eta}_{(2)}, \dots, \hat{\eta}_{(n)}$

(2) จากค่า $\hat{\eta}_{(1)}, \hat{\eta}_{(2)}, \dots, \hat{\eta}_{(n)}$ นำมาคำนวณค่าประมาณและค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของแจ๊คไนฟ์ ดังนี้ $\hat{\eta}_J = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\eta}_{(i)}$;

$$SE_J = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\hat{\eta}_{(i)} - \hat{\eta}_J)^2}$$

(3) จะได้ช่วงความเชื่อมั่นสำหรับพารามิเตอร์ η ของวิธีแจ๊คไนฟ์ คือ

$$\left[\hat{\eta}_J - t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} SE_J, \hat{\eta}_J + t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} SE_J \right] \text{ โดยที่ } t_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

คือ ค่าวิกฤตที่ได้จากการเปิดตาราง t ที่ $df = n-1$

3.3 จำลองข้อมูลและคำนวณช่วงความเชื่อมั่นจำนวน 1,000 ครั้ง

3.4 นำช่วงความเชื่อมั่นที่คำนวณได้ในแต่ละวิธี มาพิจารณาว่าครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ η หรือไม่ โดยการพิจารณาช่วงที่ครอบคลุมค่าพารามิเตอร์แล้ว

ทำการบวกสะสมจำนวนที่ช่วงคลุมค่าพารามิเตอร์ไว้ จากนั้นนำค่าดังกล่าวไปคำนวณค่าประมาณ สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น ($\hat{c}$) ดังนี้

$$\text{ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น} = \frac{\text{จำนวนครั้งที่ช่วงคลุมค่าพารามิเตอร์}}{1,000}$$

3.5 นำวิธีการประมาณค่าที่มีช่วงความเชื่อมั่น ไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด มาคำนวณค่าความกว้างเฉลี่ย โดยที่เกณฑ์ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดนั้นพิจารณาจากการทดสอบสมมติฐาน [8] ดังนี้ $H_0: c \geq c_0$; $H_1: c < c_0$ ซึ่งจะปฏิเสธสมมติฐานหลัก H_0 เมื่อ $\hat{c} < c_0 - Z_\alpha \sqrt{\frac{c_0(1-c_0)}{M}}$ ซึ่งวิธีการประมาณค่าที่ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด คือ $\hat{c} \geq c_0 - Z_\alpha \sqrt{\frac{c_0(1-c_0)}{M}}$ โดยที่ c คือ ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น $\hat{c}$ คือ ค่าประมาณ

สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น c_0 คือ ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด ซึ่งเท่ากับ 95 % และ M คือ จำนวนครั้งของการทดลองซ้ำซึ่งเท่ากับ 1,000 ครั้ง ดังนั้นในที่นี้จะได้ว่า $\hat{c} \geq 0.95 - 1.645 \sqrt{\frac{0.95(1-0.95)}{1000}} = 0.9387$ นั่นคือ ช่วงความเชื่อมั่นในแต่ละวิธีต้องมีค่าไม่ต่ำกว่า 0.9387 ที่สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น 0.95 แล้วทำการบวกสะสมจำนวนที่ช่วงความเชื่อมั่นมีค่าไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด จากนั้นคำนวณค่าประมาณความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นได้ดังนี้

$$\text{ค่าประมาณความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น} = \frac{\sum_{i=1}^M (U_i - L_i)}{M}$$

โดยที่ U_i คือ ค่าขอบเขตบนของช่วงความเชื่อมั่นของการทำซ้ำครั้งที่ i และ L_i คือ ค่าขอบเขตล่างของช่วงความเชื่อมั่นของการทำซ้ำครั้งที่ i

3.6 เปรียบเทียบค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นในแต่ละวิธี โดยวิธีการประมาณค่าใดให้ค่าความกว้างเฉลี่ยต่ำที่สุดจะถือว่าเป็นวิธีการประมาณค่าที่ดีที่สุดในการสถานการณ์นั้น

4. ผลการศึกษา

งานวิจัยนี้เปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ขนาด η ของการแจกแจงไวบูลล์แบบ

สองพารามิเตอร์เมื่อกำหนดให้ทราบค่าพารามิเตอร์ $\beta = \beta_0 = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ด้วยวิธีการประมาณค่า 2 วิธี คือ วิธีบูตสแตรปทีและวิธีแจ๊คไนฟ์ ทำการเปรียบเทียบที่สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นเท่ากับ 95 % โดยพิจารณาเปรียบเทียบจากค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่มีค่าไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด ซึ่งในที่นี้ต้องมีค่าไม่ต่ำกว่า 0.9387 และนำวิธีการที่มีค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดไปคำนวณค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น โดยที่วิธีการใดที่ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยต่ำที่สุดจะถือว่าเป็นวิธีการที่ดีที่สุดในการสถานการณ์นั้น ผลการศึกษาสรุปได้ดังนี้

ตารางที่ 1 ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของวิธีบูตสเตรปทีและวิธีแจ๊คไนฟ์ที่สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น 95 %

n	η	$\beta_0 = 1$		$\beta_0 = 2$		$\beta_0 = 3$		$\beta_0 = 4$		$\beta_0 = 5$		$\beta_0 = 6$	
		วิธี B	วิธี J	วิธี B	วิธี J	วิธี B	วิธี J	วิธี B	วิธี J	วิธี B	วิธี J	วิธี B	วิธี J
10	1	0.906	0.209	0.911	0.215	0.893	0.203	0.913	0.206	0.900	0.205	0.894	0.206
	1.5	0.900	0.204	0.888	0.192	0.880	0.217	0.903	0.201	0.899	0.209	0.899	0.161
	2	0.882	0.205	0.901	0.182	0.880	0.185	0.908	0.210	0.905	0.221	0.898	0.172
	2.5	0.898	0.182	0.912	0.192	0.892	0.177	0.867	0.197	0.891	0.186	0.886	0.207
	3	0.903	0.162	0.907	0.185	0.891	0.201	0.901	0.203	0.909	0.199	0.901	0.182
20	1	0.915	0.078	0.918	0.083	0.912	0.095	0.889	0.081	0.927	0.080	0.917	0.080
	1.5	0.922	0.079	0.912	0.073	0.919	0.096	0.915	0.084	0.933	0.086	0.922	0.063
	2	0.911	0.091	0.915	0.095	0.910	0.081	0.924	0.089	0.908	0.107	0.928	0.090
	2.5	0.919	0.069	0.921	0.093	0.934	0.090	0.919	0.075	0.919	0.097	0.924	0.097
	3	0.898	0.081	0.929	0.093	0.912	0.080	0.921	0.085	0.914	0.102	0.935	0.088
30	1	0.930	0.054	0.917	0.061	0.924	0.060	0.931	0.064	0.933	0.051	0.912	0.052
	1.5	0.927	0.044	0.926	0.050	0.937	0.061	0.926	0.056	0.914	0.045	0.918	0.060
	2	0.930	0.056	0.919	0.054	0.934	0.055	0.919	0.055	0.931	0.049	0.929	0.057
	2.5	0.927	0.050	0.924	0.071	0.933	0.071	0.918	0.059	0.932	0.070	0.940	0.055
	3	0.917	0.073	0.924	0.067	0.934	0.058	0.914	0.066	0.925	0.063	0.934	0.069
50	1	0.923	0.034	0.950	0.031	0.924	0.034	0.931	0.038	0.934	0.030	0.938	0.036
	1.5	0.935	0.037	0.949	0.034	0.940	0.027	0.937	0.036	0.928	0.031	0.925	0.033
	2	0.938	0.041	0.932	0.030	0.930	0.056	0.920	0.040	0.942	0.030	0.948	0.034
	2.5	0.935	0.027	0.948	0.041	0.931	0.037	0.929	0.036	0.937	0.043	0.929	0.030
	3	0.929	0.040	0.938	0.041	0.943	0.042	0.939	0.036	0.927	0.036	0.920	0.043
100	1	0.942	0.014	0.941	0.018	0.944	0.007	0.937	0.016	0.949	0.011	0.954	0.015
	1.5	0.939	0.017	0.949	0.020	0.953	0.023	0.943	0.009	0.948	0.016	0.946	0.011
	2	0.946	0.019	0.931	0.015	0.941	0.017	0.946	0.022	0.942	0.016	0.951	0.012
	2.5	0.934	0.010	0.943	0.017	0.935	0.016	0.932	0.015	0.944	0.015	0.945	0.018
	3	0.956	0.016	0.949	0.014	0.937	0.023	0.93	0.026	0.951	0.017	0.952	0.017

หมายเหตุ วิธี B คือ วิธีบูตสเตรปที (Bootstrap-t method)

วิธี J คือ วิธีแจ๊คไนฟ์ (Jackknife method)

ตัวหนา คือ กรณีที่ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่คำนวณได้มีค่าไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดซึ่งเท่ากับ 0.9387

จากตารางที่ 1 ที่สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น 95 % สรุปผลการศึกษาได้ดังนี้

4.1 วิธีбутสเตรปที

กรณีขนาดตัวอย่าง เท่ากับ 10 และ 20 ให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด ในทุกค่าพารามิเตอร์ η และ β_0

กรณีขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 ให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดในทุกค่าพารามิเตอร์ η และ β_0 ยกเว้น กรณีที่ $\eta = 2.5$ และ $\beta_0 = 6$

กรณีขนาดตัวอย่าง เท่ากับ 50 เมื่อพิจารณาที่ค่าพารามิเตอร์ η จะให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด และเมื่อพิจารณาร่วมกับค่าพารามิเตอร์ β_0 จะให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดในบางพารามิเตอร์ ยกเว้นในกรณีที่ β_0 เท่ากับ 1 จะให้ค่าสัมประสิทธิ์ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด

กรณีขนาดตัวอย่าง เท่ากับ 100 โดยส่วนใหญ่ให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด

4.2 วิธีแจ็คไนฟ์

วิธีแจ็คไนฟ์ให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด ในทุกขนาดตัวอย่าง และทุกค่าพารามิเตอร์ η และ β_0

ดังนั้น เมื่อพบว่าวิธีแจ็คไนฟ์มีค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด จึงไม่นำวิธีแจ็คไนฟ์มาคำนวณค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น และสำหรับวิธีбутสเตรปทีสามารถคำนวณค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น เมื่อขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 30, 50 และ 100 แสดงดังตารางที่ 2

จากตารางที่ 2 วิธีбутสเตรปทีเป็นวิธีเดียวที่นำมาคำนวณค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นเมื่อขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 30, 50 และ 100 สามารถสรุปผลการศึกษาได้ดังนี้

4.2.1 กรณีขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 วิธีбутสเตรปทีให้ค่าต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดในทุกกรณี มีเพียงกรณีเดียว คือ ที่ค่าพารามิเตอร์ η เท่ากับ 2.5 และ β_0 เท่ากับ 6 ที่ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น

4.2.2 กรณีขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50 วิธีбутสเตรปทีให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นในบางค่าพารามิเตอร์ โดยเมื่อพิจารณาให้ทุกค่าพารามิเตอร์ η คงที่ เมื่อค่าพารามิเตอร์ β_0 เปลี่ยนแปลงไป พบว่าเมื่อ β_0 มีค่าเพิ่มมากขึ้นจะทำให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นมีค่าลดลง โดยจะมีค่าต่ำที่สุดเมื่อ $\beta_0 = 6$ รองลงมาคือ β_0 เท่ากับ 5, 4, 3 และ 2 ตามลำดับ ในขณะที่เดียวกันเมื่อพิจารณาให้ค่าพารามิเตอร์ β_0 คงที่ เมื่อค่าพารามิเตอร์ η เปลี่ยนแปลงไป พบว่าเมื่อ η มีค่าเพิ่มขึ้นจะทำให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นมีค่าเพิ่มมากขึ้น

4.2.3 กรณีขนาดตัวอย่างเท่ากับ 100 วิธีбутสเตรปทีให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำที่สุดที่ค่าพารามิเตอร์ η เท่ากับ 1 รองลงมาคือ η เท่ากับ 1.5, 2, 2.5 และ 3 ตามลำดับ โดยเมื่อพิจารณาให้ทุกค่าพารามิเตอร์ η คงที่ เมื่อค่าพารามิเตอร์ β_0 เปลี่ยนแปลงไป พบว่าเมื่อ β_0 มีค่าเพิ่มมากขึ้นจะทำให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นมีค่าลดลง ในขณะที่เดียวกันเมื่อพิจารณาให้ค่าพารามิเตอร์ β_0 คงที่ เมื่อค่าพารามิเตอร์ η เปลี่ยนแปลงไป พบว่าเมื่อ η มีค่าเพิ่มมากขึ้นจะทำให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นมีค่าเพิ่มขึ้น

ตารางที่ 2 ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นของวิธีบูตสเตรปทีและวิธีแจ๊คไนฟ์ที่สัมพันธ์กับความเชื่อมั่น 95 %

n	η	$\beta_0 = 1$	$\beta_0 = 2$	$\beta_0 = 3$	$\beta_0 = 4$	$\beta_0 = 5$	$\beta_0 = 6$
		วิธี B	วิธี B	วิธี B	วิธี B	วิธี B	วิธี B
30	1	-	-	-	-	-	-
	1.5	-	-	-	-	-	-
	2	-	-	-	-	-	-
	2.5	-	-	-	-	-	0.2711
	3	-	-	-	-	-	-
50	1	-	0.2600	-	-	-	-
	1.5	-	0.3911	0.2559	-	-	-
	2	-	-	-	-	0.2059	0.1724
	2.5	-	0.6536	-	-	-	-
	3	-	-	0.5194	0.3848	-	-
100	1	0.3711	0.1851	0.1225	-	0.0736	0.0620
	1.5	0.5561	0.2794	0.1857	0.1381	0.1105	0.0918
	2	0.7471	-	0.2443	0.1843	0.1457	0.1231
	2.5	-	0.4585	-	-	0.1843	0.1532
	3	1.1316	0.5544	-	-	0.2221	0.1854

หมายเหตุ วิธี B คือ วิธีบูตสเตรปที (Bootstrap-t method)

- หมายถึง ไม่มีค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น เนื่องจากมีค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด

5. สรุปผลการศึกษา

จากการพิจารณาเกณฑ์ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นและค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นพบว่าวิธีบูตสเตรปที เป็นวิธีที่ให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด ในขณะที่วิธีแจ๊คไนฟ์ให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดในทุกกรณี ซึ่งโดยส่วนใหญ่วิธีบูตสเตรปทีจะให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่

กำหนดในกรณีที่ตัวอย่างมีขนาดใหญ่ คือ 50 และ 100 และเมื่อนำไปพิจารณาค่าความกว้างเฉลี่ย พบว่า เมื่อค่าพารามิเตอร์ η มีค่าเพิ่มขึ้น จะทำให้ค่าความกว้างเฉลี่ยมีค่าเพิ่มมากขึ้น และเมื่อพิจารณาที่ค่าพารามิเตอร์ β_0 พบว่าเมื่อ β_0 มีค่ามากขึ้นจะทำให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นมีค่าลดลง ซึ่งจะเห็นได้ว่าขนาดตัวอย่างและค่าพารามิเตอร์มีผลต่อค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นและค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น

6. ข้อเสนอแนะจากการวิจัย

6.1 ในการเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าควรศึกษาเกณฑ์การพิจารณาเพิ่มเติมจากเกณฑ์ที่กำหนดในงานวิจัยนี้เพื่อให้ได้ข้อสรุปที่มีความแม่นยำมากยิ่งขึ้น เช่น ในงานของ Patil and Kulkarni [9] ได้เสนอเกณฑ์ในการเปรียบเทียบ คือ ความสมดุลของความน่าจะเป็นที่ไม่ครอบคลุม (Balance of right and left noncoverage probabilities) ค่าคาดหวัง P-bias [E(P-bias)] และค่าคาดหวัง P-confidence [E(P-confidence)] ซึ่งเป็นเกณฑ์ที่พิจารณาฟังก์ชันของ P-value

6.2 ในการศึกษาครั้งต่อไปอาจศึกษาการแจกแจงไวบูลล์แบบสองพารามิเตอร์ ในกรณีที่ไม่ทราบค่าทั้งพารามิเตอร์ขนาด (scale parameter) และพารามิเตอร์รูปร่าง (shape parameter)

7. รายการอ้างอิง

- [1] สุจินต์ หล้าคำ, 2542, การศึกษาสถิติไวบูลล์, การค้นคว้าแบบอิสระเชิงวิทยานิพนธ์, มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, เชียงใหม่.
- [2] กัญญ์พิชญา พุทธะไชยทัศน์, 2552, การเปรียบเทียบการประมาณการแจกแจงของข้อมูลสมมาตรและไม่สมมาตรด้วยวิธีแฉ็คโนฟฟ์กับวิธีบูตสเตรป, วิทยานิพนธ์ปริญญาโท, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพฯ.
- [3] Oyeyemi, G.M., 2008, Comparison of Bootstrap and Jackknife methods of resampling in estimating population parameters, Global J. Pure Appl. Sci. 14: 217-220.
- [4] Diccio, T.J. and Efron, B., 1996, Bootstrap confidence intervals, Stat. Sci. 11: 189-228.
- [5] Efron, B., 1979, Bootstrap methods: Another look at the Jackknife, Ann. Stat. 7: 1-26.
- [6] Quenouille, M.H., 1956, Notes on bias in estimation, Biometrika 43: 353-360.
- [7] Miller, R.G., 1974, The jackknife: A review, Biometrika 61: 1-15.
- [8] รุ่งตะวัน วัฒนธรม, 2553, การเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับค่าเฉลี่ยประชากร, วิทยานิพนธ์ปริญญาโท, มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์, ปทุมธานี.
- [9] Patil, V.V. and Kulkarni, H.V., 2012, Comparison of confidence intervals for the poisson mean: Some new aspects, REVSTAT Stat. J. 10: 211-227.