

ความสวยงามวางนัยทั่วไป : ผลคูณของ 76923 กับพหุคูณของ 13

Generalized Beauty: The Product of 76923 and the Multiple of 13

มันธิยา ครุฑธมมงคล และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์*

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยพะเยา อำเภอเมือง จังหวัดพะเยา 56000

Manthiya Krutthamongkon and Aiyared Iampan*

Division of Mathematics, School of Science, University of Phayao, Mueang, Phayao 56000

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการศึกษาและการหารูปทั่วไปของผลคูณของ 76923 กับพหุคูณของ 13 ซึ่งได้จากการสังเกตผลหาร $\frac{1}{13} = 0.\dot{0}76923\dot{}$ โดยใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์เป็นหลักในการพิสูจน์ ผลการศึกษาพบรูปทั่วไปของผลคูณของ 76923 กับพหุคูณของ 13 ดังนี้ $76923 \times 13 \times n = (n-1)\underbrace{99999}_{\#(9)=5}(10-n)$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

คำสำคัญ : หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์, พหุคูณของ 13, ผลคูณ

Abstract

This article presents the study and finding a general form of the product of 76923 and the multiple of 13 in which from the observation of the quotient $\frac{1}{13} = 0.\dot{0}76923\dot{}$. The Principle of Mathematical Induction was used primarily for the proof. The results show that the general form of the product of 76923 and the multiple of 13 is $76923 \times 13 \times n = (n-1)\underbrace{99999}_{\#(9)=5}(10-n)$ for all positive integer n .

Key words: principle of mathematical induction, multiple of 13, product

1. บทนำ

ความสวยงามของคณิตศาสตร์ที่พบกันบ่อยอย่างหนึ่งคือสมบัติทางพีชคณิตของตัวเลข ซึ่งเราได้สังเกตเห็นความสัมพันธ์ทางพีชคณิตของตัวเลขบางอย่างจากผลหารต่อไปนี้

$$\frac{1}{13} = 0.076923076923\ldots = 0.\dot{0}76923\dot{}$$

เราพบว่าผลหารที่ได้อยู่ในรูปของทศนิยมซ้ำ ซึ่งจำนวนซ้ำนี้เองที่ทำให้เกิดความสวยงามที่

น่าสนใจ คือ รูปแบบของผลคูณของจำนวน(ซ้ำ) 76923 กับพหุคูณของ 13 ที่มีผลหารเท่ากับ 1, 2, 3, ..., 10 โดยได้เขียนแสดงผลการสังเกตไว้ในหัวข้อต่อไป ฉะนั้นถ้าเราสามารถหารูปทั่วไปของ 76923 กับพหุคูณของ 13 ได้สำหรับทุกผลหาร ก็จะเป็นการเพิ่มความสะดวกให้มากขึ้นสำหรับการคำนวณหาผลคูณนั้นนั่นเอง การศึกษาและการหารูปทั่วไปของผลคูณของ 76923 กับพหุคูณของ 13 ได้แนวคิดจากบทความเรื่อง ความสวยงามวางนัยทั่วไป : การยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1 [1] ที่ได้แสดงถึงการศึกษาและการหารูปทั่วไปของผลการยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1 โดยได้พบว่าผลการยกกำลังสองนี้สามารถเขียนอยู่ในรูปทั่วไปได้

ดังนั้นบทความนี้จึงมีวัตถุประสงค์ที่จะศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณของ 76923 กับพหุคูณของ 13 เพื่อความสะดวกสำหรับการคำนวณหาผลคูณดังกล่าว โดยเครื่องมือที่เราใช้เป็นหลักในการพิสูจน์คือขั้นตอนวิธีการหาร และหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งกล่าวไว้ดังนี้

ทฤษฎีบท 1 ขั้นตอนวิธีการหาร (division algorithm) [2]

ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $b \neq 0$ แล้วมีจำนวนเต็ม q และ r เพียงชุดเดียวเท่านั้น ซึ่ง $a = bq + r$ และ $0 \leq r < |b|$

ทฤษฎีบท 2 หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (principle of mathematical induction) [2] กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความเกี่ยวกับจำนวนเต็มบวก n ซึ่งสอดคล้องกับข้อความต่อไปนี้

(1) $P(1)$ เป็นจริง

(2) ถ้า $P(k)$ เป็นจริง สำหรับจำนวนเต็มบวก k แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

จาก [1,3] กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็มใด ๆ และ $b=10$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม q และ r ซึ่ง $a = 10 \cdot q + r$ และ $0 \leq r < 10$ นั่นคือ r เป็นเลขโดดเรานิยาม

$$a = {}_qr \quad (I)$$

เช่น	$0 = {}_00$	$10 = {}_10$	$50 = {}_50$	$500 = {}_{50}0$	$1000 = {}_{100}0$
	$1 = {}_01$	$11 = {}_11$	$51 = {}_51$	$501 = {}_{50}1$	$1001 = {}_{100}1$
	$2 = {}_02$	$12 = {}_12$	$52 = {}_52$	$502 = {}_{50}2$	$1002 = {}_{100}2$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$9 = {}_09$	$19 = {}_19$	$59 = {}_59$	$509 = {}_{50}9$	$1009 = {}_{100}9$
และ	$-0 = {}_{-0}0$	$-10 = {}_{-1}0$	$-50 = {}_{-5}0$	$-500 = {}_{-50}0$	$-1000 = {}_{-100}0$
	$-1 = {}_{-1}9$	$-11 = {}_{-2}9$	$-51 = {}_{-6}9$	$-501 = {}_{-51}9$	$-1001 = {}_{-101}9$
	$-2 = {}_{-2}8$	$-12 = {}_{-2}8$	$-52 = {}_{-6}8$	$-502 = {}_{-51}8$	$-1002 = {}_{-101}8$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$-9 = {}_{-1}1$	$-19 = {}_{-2}1$	$-59 = {}_{-6}1$	$-509 = {}_{-51}1$	$-1009 = {}_{-101}1$

เพื่อความสะดวกในการเขียน เราจะเขียนจำนวน ${}_0r$ แทนด้วย r สำหรับทุกจำนวนเต็ม $0 \leq r < 10$ และได้นิยามเซตของจำนวนใน (I) ดังบท

นิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1 [3] กำหนดให้ ${}_z\mathcal{R}$ แทนเซตของจำนวนใน (I) ทั้งหมด นั่นคือ

${}_Z\mathcal{R} = \{{}_q r \mid q, r \in \mathbb{Z} \text{ และ } 0 \leq r < 10\}$ (II)
และเรียกสมาชิกของ ${}_Z\mathcal{R}$ ว่า จำนวนเศษเหลือ
(remainder number)

จาก [4] จะได้ว่าการแปลงจำนวนที่ได้จากการ
เรียงกันของจำนวนเศษเหลือเป็นเลขฐานสิบทำได้
ดังนี้

$$q_n r_n q_{n-1} r_{n-1} q_{n-2} r_{n-2} \cdots q_3 r_3 q_2 r_2 q_1 r_1 = q_n (r_n + q_{n-1})(r_{n-1} + q_{n-2}) \cdots (r_3 + q_2)(r_2 + q_1)r_1$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n เช่น การแปลง $237_4 9_1 4_{-2} 601$ ที่ได้จากการเรียงกันของจำนวนเศษเหลือ
กลับเป็นเลขฐานสิบ ดังนี้

$$\begin{aligned} 237_4 9_1 4_{-2} 601 &= {}_0 2 {}_0 3 {}_0 7 {}_4 9 {}_1 4_{-2} 6 {}_0 0 {}_0 1 \\ &= 0(2+0)(3+0)(7+4)(9+1)(4-2)(6+0)(0+0)1 \\ &= 23(11)(10)2601 \\ &= 23_1 1_0 2601 \\ &= 2(3+1)(1+1)02601 \\ &= 24202601 \end{aligned}$$

การศึกษาและการประยุกต์ของจำนวนเศษ
เหลือดูได้จาก [1,3,5,6] และเพื่อความสะดวกต่อการ
พิสูจน์ เราจะใช้สัญลักษณ์ $\#(m)$ แทนจำนวนของ
 m ที่เรียงติดกัน สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก m เช่น
 $\underbrace{19999998}_{\#(9)=5}$

2. ผลการศึกษาหลัก

จากการสังเกตผลคูณของ 76923 กับพหุคูณ
ของ 13 ทำให้เราพบความสัมพันธ์ที่น่าสนใจดังนี้

$$\begin{aligned} 76923 \times 13 \times 1 &= 76923 \times 13 &= 0999999 \\ 76923 \times 13 \times 2 &= 76923 \times 26 &= 1999998 \\ 76923 \times 13 \times 3 &= 76923 \times 39 &= 2999997 \\ 76923 \times 13 \times 4 &= 76923 \times 52 &= 3999996 \\ 76923 \times 13 \times 5 &= 76923 \times 65 &= 4999995 \\ 76923 \times 13 \times 6 &= 76923 \times 78 &= 5999994 \\ 76923 \times 13 \times 7 &= 76923 \times 91 &= 6999993 \\ 76923 \times 13 \times 8 &= 76923 \times 104 &= 7999992 \\ 76923 \times 13 \times 9 &= 76923 \times 117 &= 8999991 \\ 76923 \times 13 \times 10 &= 76923 \times 130 &= 9999990 \end{aligned}$$

เราสังเกตเห็นว่าผลคูณ

$$76923 \times 13 \times n = (n-1) \underbrace{99999}_{\#(9)=5} (10-n)$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \leq 10$

ตัวอย่าง 1 จะแสดงให้เห็นว่าผลคูณที่ทำได้
สอดคล้องกับข้อสังเกตของเรา และถ้า $n > 10$ แล้ว
ผลคูณที่ทำได้ไม่สอดคล้องกับข้อสังเกตของเรา ซึ่งจะ
นำเราไปสู่การศึกษาของบทความนี้

ตัวอย่าง 1 ผลคูณ ของ $76923 \times 13 \times 2$
สามารถหาได้ถูกต้องจากการสังเกตที่เราพบ โดยเลข
หลักแรกของผลลัพธ์เป็น 2-1 และเลขหลักสุดท้าย
เป็น 10-2 นั่นคือ

$$\begin{aligned} 76923 \times 13 \times 2 &= (2-1) \underbrace{99999}_{\#(9)=5} (10-2) \\ &= \underbrace{1999998}_{\#(9)=5} \end{aligned}$$

แต่ถ้า $n > 10$ จะเห็นได้ว่า $10-n < 0$ เช่น
ผลคูณของ $76923 \times 13 \times 11 = 10999989$ ซึ่งเทียบกับ
การสังเกตข้างต้น จะได้เป็น $1099999(-1)$ ทำให้เรา
ไม่ทราบความหมายในระบบเลขฐานสิบ

ด้วยเหตุนี้ เราจึงเกิดข้อสงสัยสองข้อดังนี้

(1) เราสามารถเขียนรูปทั่วไปของผลคูณของ 76923 กับพหุคูณของ 13 ได้หรือไม่

(2) ถ้าเราสามารถเขียนรูปทั่วไปของผลคูณของ 76923 กับพหุคูณของ 13 ได้ แล้วผลคูณที่ได้จะสอดคล้องกับการสังเกตที่เราพบหรือไม่

บทตั้ง 1 มีประโยชน์อย่างมากสำหรับการศึกษาในบทความนี้ โดยได้แสดงให้เห็นถึงลักษณะของจำนวนเศษเหลือของจำนวนเต็มลบ ยิ่งไปกว่านั้นยังได้นิยามการดำเนินการทวิภาค (binary operation) $\boxplus$ บน ${}_Z\mathcal{R}$ โดย

$${}_q r \boxplus {}_t s = \begin{cases} {}_{q+t}(r+s) & ; 0 \leq r+s \leq 9 \\ {}_{(q+t)+b} a & ; r+s \geq 10, r+s = {}_b a, 0 \leq a < 10, b \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

สำหรับทุก ${}_q r, {}_t s \in {}_Z\mathcal{R}$ และจะได้ว่า $\langle {}_Z\mathcal{R}, \boxplus \rangle$ เป็นกรุป (group)

บทตั้ง 1 [3] กำหนดให้ $n \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $n = {}_q r$ จะได้ว่า

$$-n = \begin{cases} {}_{-q} 0 & ; r = 0 \\ {}_{-(q+1)}(10-r) & ; r \neq 0 \end{cases} \quad (\text{III})$$

ทฤษฎีบท 3 [3] $\langle {}_Z\mathcal{R}, \boxplus \rangle$ เป็นกรุป

บทตั้ง 2 สำหรับทุกจำนวนนับ n จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 10-n+9 &= \begin{cases} {}_1(9-n) & ; n \leq 9 \\ {}_{-q}(10-r) & ; n \geq 10, n-9 = {}_q r, 0 \leq r < 10, q \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &= {}_1(9-n) \text{ เมื่อ } 9-n \text{ ถูกแปลงเป็นจำนวนเศษเหลือ} \end{aligned}$$

การพิสูจน์ จากการดำเนินการทวิภาค $\boxplus$ ของกรุป ${}_Z\mathcal{R}$ เราพบว่า

$$10-n+9 = 10 + (9-n) = {}_1 0 \boxplus (9-n)$$

สำหรับทุกจำนวนนับ n เมื่อ $9-n$ จะต้องถูกแปลงเป็นจำนวนเศษเหลือ ฉะนั้นโดยบทตั้ง 1 ทำให้เราแปลง $9-n$ เป็นจำนวนเศษเหลือได้ดังนี้

$$9-n = \begin{cases} {}_0(9-n) & ; n \leq 9 \\ {}_{-(q+1)}(10-r) & ; n \geq 10, n-9 = {}_q r, 0 \leq r < 10, q \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ทำให้เราได้ว่า

$$\begin{aligned} 10-n+9 &= {}_1 0 \boxplus \begin{cases} {}_0(9-n) & ; n \leq 9 \\ {}_{-(q+1)}(10-r) & ; n \geq 10, n-9 = {}_q r, 0 \leq r < 10, q \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &= \begin{cases} {}_1(9-n) & ; n \leq 9 \\ {}_{-q}(10-r) & ; n \geq 10, n-9 = {}_q r, 0 \leq r < 10, q \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &= {}_1(9-n) \text{ เมื่อ } 9-n \text{ ถูกแปลงเป็นจำนวนเศษเหลือ} \end{aligned}$$

โดยบทตั้ง 1 และ 2 ทำให้เราสามารถหารูปทั่วไปของผลคูณของ 76923 กับพหุคูณของ 13 ได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4 สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า

$$76923 \times 13 \times n = (n-1) \underset{\#(9)=5}{99999} (10-n) \quad (\text{IV})$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$$76923 \times 13 \times n = (n-1) \underset{\#(9)=5}{99999} (10-n)$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n เนื่องจาก

$$76923 \times 13 \times 1 = 0999999$$

$$= (1-1)\underbrace{99999}_{\#(9)=5}(10-1)$$

จะได้ว่า $P(1)$ เป็นจริง สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริง

สำหรับจำนวนเต็มบวก k จะได้ว่า

$$76923 \times 13 \times k = (k-1)\underbrace{99999}_{\#(9)=5}(10-k)$$

เราจะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง พิจารณา

$$76923 \times 13 \times (k+1) = (76923 \times 13 \times k) + (76923 \times 13 \times 1)$$

$$= (k-1)\underbrace{99999}_{\#(9)=5}(10-k) + 0\underbrace{999999}_{\#(9)=5}$$

$$= (k-1)\underbrace{18_18_18_18_1}_{\#(1,8)=5}(10-k+9)$$

$$= (k-1)\underbrace{18_18_18_18_1}_1(9-k)$$

$$= (k-1+1)\underbrace{99999}_{\#(9)=5}(9-k)$$

$$= k\underbrace{99999}_{\#(9)=5}(9-k)$$

$$= \begin{cases} k\underbrace{99999}_{\#(9)=5}(9-k) & ; k \leq 9 \\ k\underbrace{99999}_{\#(9)=5}{}_{-(q+1)}(10-r) & ; k \geq 10, k-9 = {}_q r, 0 < r \leq 9 \\ k\underbrace{99999}_{\#(9)=5}{}_{-q} 0 & ; k \geq 10, k-9 = {}_q 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} ((k+1)-1)\underbrace{99999}_{\#(9)=5}(10-(k+1)) & ; k \leq 9 \\ ((k+1)-1)\underbrace{99999}_{\#(9)=5}{}_{-(q+1)}(10-r) & ; k \geq 10, k-9 = {}_q r, 0 < r \leq 9 \\ ((k+1)-1)\underbrace{99999}_{\#(9)=5}{}_{-q} 0 & ; k \geq 10, k-9 = {}_q 0 \end{cases}$$

$$= ((k+1)-1)\underbrace{99999}_{\#(9)=5}(10-(k+1))$$

ฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง ดังนั้นโดยหลักการ

อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า

$$76923 \times 13 \times n = (n-1)\underbrace{99999}_{\#(9)=5}(10-n)$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงถึงการหาผลคูณของ

76923 กับพหุคูณของ 13 โดยประยุกต์ใช้บทตั้ง 1 และทฤษฎีบท 4 ซึ่งเป็นการหาผลคูณที่ถูกต้องและรวดเร็ว

ตัวอย่าง 2 จงหาค่าของ $76923 \times 13 \times 27$

วิธีทำ โดยบทตั้ง 1 และทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า

$$76923 \times 13 \times 27 = (26)\underbrace{99999}_{\#(9)=5}(-17)$$

$$= 2\underbrace{699999}_{\#(9)=5}{}_{-2}3$$

$$= 26999973$$

ตัวอย่าง 3 จงหาค่าของ $76923 \times 13 \times 538$

วิธีทำ โดยบทตั้ง 1 และทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 76923 \times 13 \times 538 &= (537) \underbrace{99999}_{\#(9)=5} (-528) \\
 &= \underbrace{53}_{\#(9)=5} \underbrace{799999}_{-53} 2 \\
 &= 537999462
 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4 จงหาค่าของ $76923 \times 13 \times 987654321$

วิธีทำ โดยบทตั้ง 1 และทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 76923 \times 13 \times 987654321 &= (987654320) \underbrace{99999}_{\#(9)=5} (-987654311) \\
 &= \underbrace{98765432}_{\#(9)=5} \underbrace{099999}_{-98765432} 9 \\
 &= 987653333345679
 \end{aligned}$$

3. บทสรุปและแนวทางการขยายการศึกษา

จากการศึกษาผลคูณของ 76923 กับพหุคูณของ 13 โดยอาศัยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์และจำนวนเศษเหลือเป็นเครื่องมือสำคัญในการพิสูจน์ ทำให้สามารถตอบข้อสงสัยทั้งสองข้อของเราได้ ดังนี้

(1) เราสามารถเขียนรูปทั่วไปของผลคูณของ 76923 กับพหุคูณของ 13 ได้ดังกล่าวไว้ในทฤษฎีบท 4 ดังนี้

$$76923 \times 13 \times n = (n-1) \underbrace{99999}_{\#(9)=5} (10-n)$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

(2) รูปทั่วไปที่ได้ตามทฤษฎีบท 4 นั้น สอดคล้องกับการสังเกตที่เราพบเมื่อแปลงเป็นจำนวนเศษเหลือ

จากการสังเกตผลคูณที่สวยงามของ 76923 กับพหุคูณของ 13 จนกระทั่งสามารถหาและพิสูจน์รูปทั่วไปได้ ซึ่งนับได้ว่ารูปทั่วไปนี้เป็นการวางนัยทั่วไป (generalization) ของการสังเกตของเรา และกล่าวเช่นเดียวกับ [4] ได้ว่ารูปทั่วไปของผลคูณของ 76923 กับพหุคูณของ 13 เป็นอีกความสวยงามวางนัยทั่วไป (generalized beauty) ในแบบคณิตศาสตร์อีกรูปแบบหนึ่ง ยิ่งไปกว่านั้นรูปทั่วไปนี้ยังช่วยให้การคำนวณหา

ผลคูณของ 76923 กับพหุคูณของ 13 เป็นเรื่องที่สะดวกและไม่ยุ่งยากเกินไป

จากบทความนี้ ผู้อ่านสามารถเริ่มศึกษาลักษณะทางพีชคณิตที่สวยงามของจำนวนบางจำนวนได้ในทำนองเดียวกับบทความนี้ อาทิ ความสัมพันธ์ทางพีชคณิตของผลหาร $\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$ โดยอาศัยจำนวนเศษเหลือและหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ในการสร้างเลขโคดและการพิสูจน์ ผู้เขียนคาดว่าน่าจะได้รูปทั่วไปเช่นกัน โดยรูปทั่วไปที่ได้จะช่วยเพิ่มความสะดวกในการคำนวณต่าง ๆ นอกเหนือจากผลการศึกษาที่ได้รับแล้ว ผู้อ่านจะได้พบกับความสวยงามของคณิตศาสตร์อีกด้วย

4. กิตติกรรมประกาศ

บทความนี้ได้รับการสนับสนุนจากกลุ่มวิจัย : Group for Young Algebraists in University of Phayao (GYA) ผู้เขียนขอขอบพระคุณผู้ประเมินบทความวิชาการทุกท่านสำหรับข้อคิดเห็นและข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์อย่างมากในการปรับปรุงบทความให้สำเร็จลุล่วงได้อย่างสมบูรณ์

5. เอกสารอ้างอิง

- [1] อัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2554, ความสวยงามวงนัยทั่วไป : การยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1, ว.นเรศวรพะเยา 4(2): 29-35.
- [2] Clark, W.E., 2002, Elementary number theory, Department of Mathematics, University of South Florida, U.S.A., Available Source: http://shell.cas.usf.edu/~wclark/elem_num_th_book.pdf, September 11, 2012.
- [3] ณัฐวุฒิ พลอาสา และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2556, ความสวยงามวงนัยทั่วไป : การเริ่มต้นของกรุปของจำนวนเศษเหลือ, ว.นเรศวรพะเยา 6(1): 25-30.
- [4] อภิสิทธิ์ เมืองมา และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2556, ความสวยงามวงนัยทั่วไป : การนิยามจำนวนหลายหลักที่แต่ละหลักเป็นจำนวนเต็ม, ว.วิชาการ มหาวิทยาลัยราชภัฏอุดรดิตถ์ 8(2): รอดิพิมพ์.
- [5] ณัฐพงษ์ พรหมวงษ์ และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2555, ความสวยงามวงนัยทั่วไป : ผลการยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 3 (เลข 6) ยกเว้นหลักหน่วยเป็นเลข 4 (เลข 7), ว.วิชาการ มหาวิทยาลัยราชภัฏกาญจนบุรี 1(1): 41-49.
- [6] อัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2556, ความสวยงามวงนัยทั่วไป : จำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1 และสมการเชิงเส้น, ว.วิทยาศาสตร์ มข. 41(3): รอดิพิมพ์.